

# 固体推進薬の焼蝕燃焼の全効果に関する理論的研究

村田 勉・福田 孝明\*

## § 1 序

焼蝕燃焼とは、固体推進薬の燃焼速度が燃焼面に平行なガス流の速度に左右されることである。燃焼速度に対するガス速度の影響は焼蝕比  $\epsilon$  で関係づけられる。 $\epsilon$  は速度の函数として表される。

$$\text{即ち} \quad \epsilon = \frac{r}{r_0} = (\text{速度}) \quad (1)$$

但し、 $r$  は圧力、薬温、ガス速度が与えられた条件における推進薬の燃焼速度、 $r_0$  は同一圧力、薬温であるが、ガス速度がない条件における推進薬の燃焼速度である。

焼蝕比をガス速度と直線関係づけて用いられる最も簡単な式は

$$\epsilon = 1 + K_0 V \quad (2)$$

この方程式は無次元の形に書く方が望ましい。

$$\text{即ち} \quad \epsilon = 1 + K_1 \frac{v}{a_f} \quad (3)$$

但し  $a_f$  は新熱的火焰温度  $T_f$  における燃焼ガスの音速である。

或実験は焼蝕において境界速度 (threshold velocity) が存在することを示した。このような効果は次式で表わされる。

$$\epsilon = 1 + K_0(v - v_0) \quad (4)$$

但し、 $1(v - v_0)$  は  $v < v_0$  のとき 0、 $v \geq v_0$  のとき 1 に等しい函数である。

Green (1953) は相当質量速度  $m/m^*$  (reduced mass velocity) を用いた式を提案した。

$$\epsilon = 1 + K_m \frac{m}{m^*} \quad (5)$$

但し  $m$  は流路内の断面平均質量速度、 $m^*$  は一定断面の流路においてマッハ数 1 となる臨界質量速度である。

焼蝕効果の計算ではしばしば次の近似式が用いられる。

$$\epsilon \approx 1 + K_2 \left( \frac{x}{L} \right) \left( \frac{A_i}{A_p} \right) \quad (6)$$

但し、 $x$  は推進薬の前端から問題の点迄の距離、 $L$  は薬長、 $A_c$  はノズルスロートの断面積、 $A_p$  は推進薬の自由空間断面積である。

本式は式 (2) に基づき一定断面の流路内のガス速度

昭和36年9月8日現在

\* 日油硝株式会社武器工場 愛知県武豊町

が、 $L$  と直線的に変化し、且推進薬に沿う圧力降下が小さいという仮定を含んでいる。

これらの式は燃焼面の任意の点において焼蝕比とガス速度或は質量速度とを関係づけるものであり、与えられた推進薬の焼蝕燃焼定数は適当な実験から求めることができる。併し、 $r$  から実際の装薬の焼蝕燃焼の全効果は次のことを考慮しなければならない。即ちガス速度或は質量速度と圧力が流路の縦方向に沿って変化し且、流路の断面形状は燃焼中変化することである。此の点を考慮して筆者等は本研究を行なつたので此処に報告する。

## § 2 Green の焼蝕燃焼式

このような観点から Green と Wimpress は焼蝕効果を考えた内部弾道式を論じている。

併し Wimpress が用いた方法は図式積分を繰返し用いるために非常に複雑である。

Green の式は

$$P_0 = \left\{ \frac{c(\rho_s - \rho_0) K_N (1 - 1/3 \Gamma^2 J^2)^n (1 + 1/2 K_2 J)}{C_0 (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)} \right\}^{1/n} \quad (7)$$

$$\Gamma = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (8)$$

$$C_D = (b T_f)^{-1/2} \Gamma \quad (9)$$

但し  $\epsilon$  はガス速度がない場合の燃焼速度式  $r_0 = c p^n$  の定数、 $n$  は同じ式における指数 (圧力指数)  $\rho_s$  と  $\rho_0$  は夫々推進薬の密度および推進薬のガス密度、 $K_N$  はノズルスロート面積に対する燃焼面積の比、 $C_D$  は推進薬の流出係数、 $\gamma$  は推進薬ガスの比熱比、 $b$  は比ガス定数、 $J (= A_i/A_p)$  は推進薬の后端における内孔面積に対するノズルスロート面積の比である。

我々の式と比較するために次の式を式 (7) から誘導した。

$$r_{av} = A (1 - 1/3 \Gamma^2 J^2)^n (1 + 1/2 K_2 J) K_N \frac{1-n}{1-n} \quad (10)$$

$$r_0 = A \cdot K_N \frac{n}{1-n} \quad (11)$$

$$r_L = A (1 - \Gamma^2 J^2)^n (1 + K_2 J) K_N \frac{n}{1-n} \quad (12)$$

$$K_2 = \frac{2}{J} \left\{ \frac{c_0 (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2) P_0^{1-n}}{c (\rho_s - \rho_0) K_N (1 - 1/3 \Gamma^2 J^2)^n} - 1 \right\} \quad (13)$$

ここで

$$A = \left\{ \frac{c^{1/n} (\rho_s - \rho_0) (1 - 1/3 \Gamma^2 J^2)^n (1 + 1/2 K_2 J)}{c_0 (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)} \right\}^{1/n} \quad (14)$$

但し、 $r_{av}$ は推進薬の面積平均燃焼速度  $r_0$ は推進薬の前端（この点ではガス流動がない）における燃焼速度、 $r_L$ は推進薬の後端における燃焼速度である。

式(7)から(14)は次の仮定に基づいて誘導されている。即ち、

(i) 推進薬に沿った圧力分布は放物線である。

Fig. 1はこの仮定が4.5時ロケットモーター内の実際の圧力分布とよく一致していることを示している。

(ii) ガス速度が小さい。従つて上式は  $J$  の小さい値に対してのみ成立する。

(iii) ガス速度は  $x$  と直線的に変化し且、推進薬に沿う圧力降下が小さい。これは焼蝕効果を表わす式として式(6)を用いることを意味するものである。

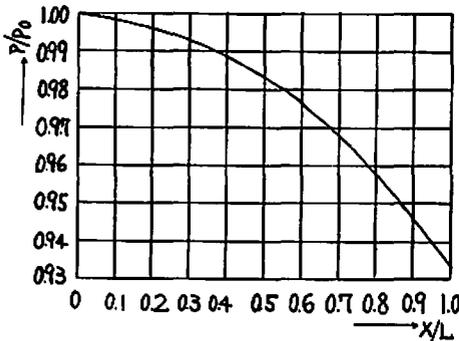


Fig. 1 4.2時ロケット推進薬内孔に沿った  
圧力分布  
( $\gamma=1.20$   $J=0.95$ )

併し乍ら最近のロケットモーターは  $J$  の大きい値（1に近い）で用いられている。式(7)から(14)は  $J$  の小さい値に成立するものであるからこれらはそのようなロケットモーターに適用することができない。

本報告の目的は  $J$  の大きい値に対して成立し推進薬の焼蝕の全効果を示す実用的近似式を与えることである。

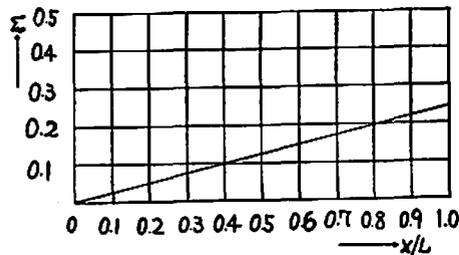


Fig. 2 推進薬内孔に沿つガス流動のマッハ数の分布

### § 3 焼蝕燃焼式

本節の諸式は、次の仮定に基づいて誘導されている。

(i) 推進薬に沿ったガス流動のマッハ数は  $x$  と直線的に変化する。Fig. 2. はこの仮定が4.5時ロケットモーターにおける実際の関係とよく一致していることを示すものである。

この関係は次式で表わされる。

$$M = M_L \left( \frac{x}{L} \right) \quad (15)$$

但し、 $M$  は流路内の断面平均マッハ数、 $M_L$  は推進薬の後端における断面平均マッハ数である。

(ii) 焼蝕燃焼を表わす式として式(3)を用いる。

即ち

$$e = 1 + K_1 \frac{v}{a_f} \quad (3)$$

熱力学的関係から

$$\frac{P}{P_0} = (1 + \gamma M^2)^{-1} \quad (16)$$

空間平均圧力も次式で定義する。

$$P_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L P dx \quad (17)$$

式(15)と(16)を用いて上式は  $M$  について容易に積分される。

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{P_0}{L} \int_0^L \frac{dx}{1 + \gamma M^2} = \frac{P_0}{L} \int_0^L \frac{dx}{1 + \gamma M_L^2 \left( \frac{x}{L} \right)^2} \\ &= P_0 \gamma^{-1/2} M_L^{-1} \tan^{-1} (\gamma^{1/2} M_L) \end{aligned} \quad (18)$$

再び熱力学的関係から

$$J = M_L^2 \left[ \frac{\gamma + 1}{2(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2)} \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (19)$$

本式は  $J$  と  $M_L$  とを関係づける式である。

燃焼面上の任意の点における燃焼速度は次式で示される。

$$\begin{aligned} r &= c P_{av} e \\ &\approx c P_{av}^n e \end{aligned} \quad (20)$$

式(18)を代入して

$$r = c P_0^n (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1} (\gamma^{1/2} M_L) \right]^n e \quad (21)$$

を熱力学的関係から

$$\frac{v}{a_f} = M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \quad (22)$$

面積平均燃焼速度は次式で定義される。

$$r_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L r dx \quad (23)$$

式(3)、(15)、(21)を用い、 $x$  について積分

すると

$$\begin{aligned} r_{av} &= \frac{CP_0^n}{L} (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \int_0^x \\ &\left\{ 1 + K_1 M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \right\} dx = CP_0^n \\ &(\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left[ 1 + K_1 M_L \right. \\ &\left. + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

燃焼ガスの単位時間の発生量  $\dot{m}_s$  は次式で示される。

$$\begin{aligned} \dot{m}_s &= (\rho_s - \rho_0) A b r_{av} \\ &= (\rho_s - \rho_0) A b CP_0^n (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1} \right. \\ &\left. (\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left[ 1 + K_1 M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] \quad (25) \end{aligned}$$

ノズルからの単位時間の流出量  $\dot{m}_D$  は次式で示される。

$$\dot{m}_D = C_D (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2) A_t P_0 \quad (26)$$

従つて平衡圧力の式として次式を得る。

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{ \frac{c(\rho_s - \rho_0) K_N (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} \right. \right. \\ &\left. \left. M_L) \right]^n \left[ 1 + K_1 M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] \right\}^{1/n} \\ &\quad (27) \end{aligned}$$

従つて又

$$r_{av} = B (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left[ 1 + K_1 \times \right. \\ \left. M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] K_N \frac{n}{1-n} \quad (28)$$

$$r_0 = B K_N \frac{n}{1-n}$$

$$r_L = B (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left\{ 1 + K_1 \right. \\ \left. M_L \left[ 1 + \frac{\gamma+1}{2} M_L^2 \right]^{-1/2} \right\} K_N \frac{n}{1-n} \quad (29)$$

$$K_1 = \left\{ \frac{P_0^{1-n} C_D (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)}{c(\rho_s - \rho_0) K_N (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. (\gamma^{1/2} M_L) \right]^n - 1 \right\} \frac{(\gamma-1)M_L^2 + 2}{(\gamma-1)M_L} \quad (30)$$

$$B = \left\{ \frac{c^{1/n} (\rho_s - \rho_0) (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. M_L) \right]^n \left[ 1 + K_1 M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] \right\}^{1/n} \quad (31)$$

若し境界速度を考えねばならない場合には上式

は次のようになる。

$$P_0 = \left\{ \frac{c(\rho_s - \rho_0) K_N (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. M_L) \right]^n \left[ 1 - K_1 M_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-1/2} + K_1 M_L + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2K_1}{C_D (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)} \right] \right\}^{1/n} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} r_{av} &= B (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left[ 1 - K_1 \right. \\ &M_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-1/2} + K_1 M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \left. \right] \\ &\times K_N \frac{n}{1-n} \quad (33) \end{aligned}$$

$$r_0 = B \cdot K_N \frac{n}{1-n}$$

$$\begin{aligned} r_L &= B (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n \left\{ 1 - K_1 \right. \\ &M_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-1/2} + K_1 M_L \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2 \right)^{-1/2} \left. \right\} \\ &K_N \frac{n}{1-n} \quad (34) \end{aligned}$$

$$K_1 = \left\{ \frac{P_0^{1-n} C_D (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)}{c(\rho_s - \rho_0) K_N (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} \right. \right. \\ \left. \left. M_L) \right]^n - 1 \right\} \left\{ K_1 M_L + \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} - M_0 \left( 1 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-1/2} \right\}^{-1} \quad (35)$$

ここで

$$B = \left\{ \frac{c^{1/n} (\rho_s - \rho_0) (\gamma^{1/2} M_L)^{-n} \left[ \tan^{-1}(\gamma^{1/2} M_L) \right]^n}{C_D (1 - 1/2 \Gamma^2 J^2)} \right. \\ \left. \left[ 1 - K_1 M_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-1/2} + K_1 M_L + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2K_1}{(\gamma-1)M_L} \right] \right\}^{1/n} \quad (36)$$

種々の燃焼定数は次のように関係している。

$$K_2 \approx K_1 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (37)$$

$$K_v = \frac{K_1}{a_f} \quad (38)$$

$$K \approx K_1 \left[ 2 + (\gamma+1) \right]^{-1/2} \quad (39)$$

#### § 4 計算方法

$P_0, r_0, r_{av}, r_L$  は、 $c, n, \rho_s, \rho_0, C_D, K_N, K_1, J$  が既知であれば次の2つの場合に分けて前述

の式を用いて計算することができる。

- (1) マッハ数  $M_0$  以上で境界速度が存在する。この場合には若し  $M_L > M_0$  であれば、それらは式(32), (34), (36) から計算できる。又若し  $M_L \leq M_0$  であればそれらは  $K_1 = 0$  として計算できる。
- (2) 境界速度が存在しない。この場合には、それらは式 (27), (28), (29), (31) から計算できる。

通常の静止燃焼試験から焼蝕燃焼定数  $K_1$  をうるためには  $P_0, e, n, \rho_s, \rho_0, C_D, K_N, J$  を与えて式 (30) から計算される。

扱燃焼が起つての時の推進葉の燃焼の挙動を論ずる。燃焼面が Fig 3 の点線に到達した時、換言

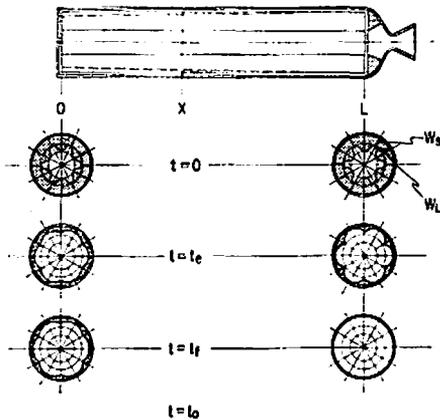


Fig. 3. 燃焼中のロケットモーターの断面図  
すれば、推進葉の後端の葉厚が燃焼し終つた時、圧力は減衰し始めるのでその時間は  $t_e$  である。(Fig 5)

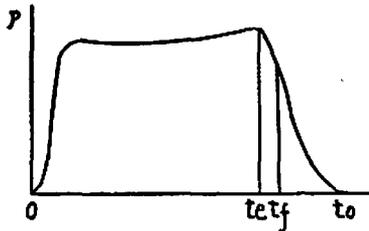


Fig. 4 圧力時間曲線

推進葉の前端の葉厚が燃焼し終つた時、全推進葉が燃焼完了するから圧力は大体 0 になる。その時間は  $t_e$  である。(Fig 4)

$r = dy/dt$  であるから、次のように書ける

$$t_e = \int_0^{W_L} \frac{dy}{r_L} \quad (40)$$

但し、 $t=0, y=0, t=t_e, y=W_L$

$$t_o = \int_0^{W_0} \frac{dy}{r_0} \quad (41)$$

但し、 $t=0, y=0, t=t_e, y=W_0$

ここで  $y$  は燃焼距離。  $t$  は燃焼時間である。

$r$  は  $y$  の非常に複雑な函数であるから式 (40) と (41) は簡単に積分できない。そこで次の手順をとる。

- (1) 推進葉の葉厚、即ち全燃焼距離を  $i$  個に分割する。
- (2) 与えられた  $y_i$  に対応する  $J_i$  を計算する。 $J_i$  は推進葉の形状の幾何学的函数から計算することができる。
- (3) 式 (19) を用いて  $J_i$  に対して  $M_L$  をプロットする。その曲線から与えられた  $J_i$  に対する  $M_{L_i}$  が求められる。
- (4) 式 (27), (30) 或は (35), (36) を用いて  $r_{L_i}$  とを計算できる。 $y_i$  に対して  $r_{0i}$  と  $r_{L_i}$  とをプロットする。
- (5) 式 (44), (43) を、図式積分すると  $t_i$  が求まる。
- (6) 式 (27) 或は (33) を用いて  $J_i$  に対応する  $P_0$  を求めることができる。 $J_i$  は  $t_i$  に対応しているから推進葉の圧力-時間曲線を書くことができる。ここで、式 (24) において  $W_L$  迄の積分は  $t_e$  を与え、式 (43) において  $W_0$  迄の積分は  $t_o$  を与える。

## § 5 結 論

前にも述べたように、本式は  $M$  か  $x$  に比例するという仮定に基いて誘導された。従つて本式は 1 に近い  $J$  の大きい値に対しても成立するものである。換言すれば本式は  $J$  の如何なる値にも適用できる。

ガス流動がない場合の燃焼速度定数と焼蝕燃焼定数が既知であれば、本式を用いて推進葉を実機に応用した場合の内部弾道特性を計算することができる。

又一方普通の静止燃焼試験から簡単に焼蝕燃焼定数  $K_2$  を得ることができる。

## 参 考 文 献

- 1) J.M. Lenoir. and, G. Robbillard, "Sixth Symposium on Combustion" Reinhold publishing Corp. N.Y. 1957. pp 663~667
- 2) L. Green, "Erosive Burning of Some Composite Solid" Jet Propulsion Vol: 24 January-February, 1954, pp 9~15
- 3) R. N. Wimpres "Internal Ballistics of Solid-Fuel Rocket", McGraw-Hill Book Company, Inc N.Y. 1950.
- 4) R.D. Geckler "The Mechanism of Combustion of Solid propellants" Re-print of paper to be read at a Colloquium held by the Advisory Group for Aeronautical Research and Development, North Atlantic Treaty organization at Cambridge, U.K., December. 7th-11th, 1953

- 5) T. Marklund and A. Lake, "Experimental Investigation of propellant Erosion" ARS Journal, vol 30. February, 1960, pp 173—178
- 6) R. B. Kershner, "Rochet Fundamentals, Chapter N.D.R.C. Division 3. Section H.

- O.S.R.D. No 3711 June 15, 1944
- 7) J. Corner, Theory of the Interior Ballistics of Guns, John Wiley, N.Y., 1950
- 8) J. A. Vandenkerckhove "Rocket propulsion, chapter 4" Elsevier publishing Company, N.Y. 1960

## Over-all Erosive Burning of Solid Propellants

Tsutomu Murata and Takaaki Fukuda

The erosive burning indicates the dependence of the burning rate of a solid propellant upon the velocity of gas flow parallel to the burning surface.

The effects of gas velocity upon burning rate can be correlated in terms of an "erosion ratio",  $\epsilon$  expressed as a function of velocity

$$\epsilon \equiv \frac{r}{r_0} f(\text{velocity})$$

where  $r$  is the burning rate of propellant under given conditions of pressure, propellant temperature, and gas velocity, and  $r_0$  is the burning rate of propellant under the same conditions, but with no gas velocity.

There are many expressions used to

relate the erosion ratio to the linear gas velocity, but they indicate merely the relationship at one point on the burning surface.

In the case of planning for scale-up of a propellant grain, we must consider that the linear gas velocity and the chamber pressure may vary along the longitudinal direction of flow channel, and that sectional configuration of flow channel may vary during firing.

The purpose of this report is to give a practical expression for the overall effect of erosive burning for the propellant grain.

(Nippon Oil and Fats Co. Ltd.)

## 坑道試験における炭鉱爆薬によるメタン着火源の形成機構

吉 河 儀 一\*

まえがき

この報文は表題に示すメタン着火源の形成機構を、数種の試験方式によつて研究したものである。ここに言うメタンとは厳密には、メタンと空気との混合気すなはち炭鉱坑気 (Firecdamp) を指している、先づ第1報では大型試験坑道での“吊し試験”を扱っているが、そこでは、薬包側面に沿はせたベンスリット導爆線によつて薬包を起爆する方式で着火試験を試み、

その結果を、通常の電気雷管起爆による着火試験の結果と比較している。なお後の場合では、薬包の起爆端とは反対の端面に、水または食塩を充填したビニールサックを、いわゆる端面被筒として取付けて、FD (Firedamp) に対するその効果を調査した。本文に詳述するように以上2つの着火試験からは、“吊し薬包”によるFD着火は、いわゆる“ポケット着火源”の形成によること、また薬包の燃轟によつて発生するジェットおよびそれが生み出す衝撃波などの直接の作用で着火しがたいこと、これらは主としてFDを

昭和36年9月9日受理

\* 工業技術院資源技術試験所 埼玉県川口市市町