

多自由面発破の爆破効果に関する力学的研究

(昭和31年5月10日 受理)

村田 勉・田中 一三

(日本油脂株式会社武豊工場)

§ 1. 緒 言

普通の採鉱発破、隧道掘進発破、大発破等のいわゆる工業発破に於ては、爆源の一方は有限の抵抗を持つ自由面であり、その反対側は言わば無限の抵抗を持つ大地そのものである。故に爆源で爆薬が爆発した場合のガス圧力の作用、即ち爆破効果の理論的研究には、此の二つの条件を境界条件として初めから考慮に入れなければならない。此のことは爆破応力が爆源から四方に均等に走らないで、自由面方向と反対方向とは異なることを意味する。従来の弾性波説や衝撃反射説では、何れも爆源から同心球面状に均等に力が伝播すると考えている点が筆者等の引張り主応力破壊説と根本的に異なる点である。

此の考えのもとに筆者等は先に一自由面発破の問題で、発破の微分方程式をたて、これをできるだけ厳密に解いて岩石内の応力分布を計算した¹⁾。そしてこの結果を用いて一自由面発破に於ける発破の基礎式を導き出すことができた²⁾。その際問題はもちろん三次元として取扱い、岩石には圧縮性を考慮に入れて計算した。

実際の発破は、一自由面発破の他に二自由面又はそれ以上の自由面を持った発破も行われる。しかしこれらの多自由面発破に関する理論的研究は、ほとんど皆無である。これは恐らく多自由面発破の場合は、一自由面発破に比して計算の複雑化ということが、その理論的研究を妨げていた大きな原因であると思われる。

われわれはここで問題にあるてどの近似を含んでもよいから、とにかく多自由面発破の問題を研究してみようと考え、以下述べるような方法でそれをなした。近似の第一は、問題を三次元から二次元に引き下げて取扱うということである。これは問題の焦点を一自由面と二自由面その他の多自由面との比較ということに持つてくれれば、三次元でも二次元でもその大略の傾向を知るためには差支えないと思われるからである。次元を下げることによつて発破の微分方程式は、いわゆる重調和函数の方程式になり、これは理論的に

は任意の境界条件について解を見出すことができる³⁾。しかし計算はかなり面倒になるから、更に岩石に体積変化がないと仮定すると、問題は調和函数に還元され、等角写像を利用して簡単に解くことが出来るようになる。

筆者等は上の手続きによつて、二自由面以上の多自由面発破に於ける岩石内の応力分布を簡単に計算できるようにした。これから導き出される爆破係数その他の結果は、すこぶる興味あるもので実用問題に対して甚だ有用なものとなるであろう。

§ 2. 発破の微分方程式

筆者等が前報¹⁾でたてた発破の微分方程式は

$$\nabla^2 f_0 = -\theta, \quad \nabla^2 \theta = 0 \quad (2.1)$$

という形であつた。ここに f なる函数は変位ベクトル u を

$$u = -\text{grad } f \quad (2.2)$$

で定義する変位ポテンシャルであり、 θ は歪テンソル ϵ_{ij} の対角和をとつた所の

$$\theta = \sum_i \epsilon_{ii}$$

なる膨脹 (dilatation) と呼ばれる量である。(2.1)式は、もちろんそのまま二次元問題に適用することができる。しかし二次元問題では、(2.2)式で定義される変位ポテンシャル f の代りに、次に述べる Airy の応力函数 U を用いた方が便利である。

物体内に応力が作用しているときの釣合の条件は、前報(3.1)式に述べたが、これを二次元に書き直し、岩石の自重を無視して外力 F を 0 とおけば、

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

となる。ここに応力テンソルの成分は、慣例に従つて σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} をそれぞれ σ_x , τ_{xy} , σ_y と書くことにした。一般に x, y の任意函数 $U(x, y)$ を考え、これから

$$\sigma_x \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} \equiv -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

で応力テンソルを作れば、(2.4)式で定義される σ が(2.3)式を満足することは明らかである。今これらの応力テンソルに対応する歪テンソルを、それぞれ ϵ_x , γ_{xy} , ϵ_y と書けば、前報(2.18)式を参照して

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2\mu' + \lambda')\epsilon_x + \lambda'\epsilon_y \\ \sigma_y &= \lambda'\epsilon_x + (2\mu' + \lambda')\epsilon_y \\ \tau_{xy} &= 2\mu'\gamma_{xy} \end{aligned}$$

となるので、これから

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_x + \sigma_y = 2(\mu' + \lambda')(\epsilon_x + \epsilon_y) = 2(\mu' + \lambda')\theta \quad (2.6)$$

が得られる。上式で θ は二次元の場合の膨張である。 θ は(2.1)から明らかのように $\nabla^2 \theta = 0$ を満足するので、Airyの函数 U を用いて書いた発破の微分方程式は、(2.1)式の代りに

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= 2(\mu' + \lambda')\theta \\ \nabla^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となるわけである。

U は(2.7)からわかるように、 $\nabla^2 \nabla^2 U = 0$ を満足するような、いわゆる重調和函数で、これは任意の境界を有し、境界条件として境界上の応力分布が与えられたときの一般解法を見出されている³⁾。しかしここでは、緒言で述べたように問題を更に単純化して、岩石の体積変化が無い場合、即ち $\theta = 0$ なる場合として解くことにする。そのとき(2.7)式は

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2.8)$$

となり、 U は調和函数になる。われわれは(2.8)式を二次元の発破の微分方程式としてここから出発する。

§ 3. 二次元調和函数の性質

今問題とする二次元平面の座標を $z = x + iy$ なる複素平面座標にとる。しかるときは、 z の任意の正則函数 $\phi(z)$ を考え、これを実数部と虚数部に分けて

$$\phi(z) = \phi(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

と書くと、 P, Q はそれぞれ二次元の調和函数になる。

$$\text{即ち} \quad \nabla^2 U = 0 \quad (3.1)$$

の解は、 z の任意の正則函数 $\phi(z)$ により

$$U = R_e[\phi(z)], \text{ 又は } U = I_m[\phi(z)]$$

と書くことができる。ここに R_e, I_m はそれぞれ次に続く括弧内の実数部分、虚数部分を表わす記号である。従つて(3.1)式を解くことは結局 z の正則函数 $\phi(z)$ を見出すことに還元され、ただ如何なる形の函数をとればよいのかは、方程式に課せられた境界条件によつてきまる。以下(3.1)の解である U としては $\phi(z)$ の

実数部分をとることに規定する。即ち解は

$$U = R_e[\phi(z)] \quad (3.2)$$

となる。

U がきまれば、これを(2.8)式に代入して応力テンソルの各成分が計算される。しかしこれらはまた、直接 $\phi(z)$ を使つて

$$\begin{aligned} 2\sigma_x &= -R_e[\phi''(z)] \\ 2\sigma_y &= R_e[\phi''(z)] \\ 2\tau_{xy} &= -I_m[\phi''(z)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

と書くことができることは、簡単な計算によつて示される。上式中には $\theta = 0$ より、 $\sigma_x + \sigma_y = 0$ なる関係が用いてある。ここで ϕ'' は z による二次微分を意味する。

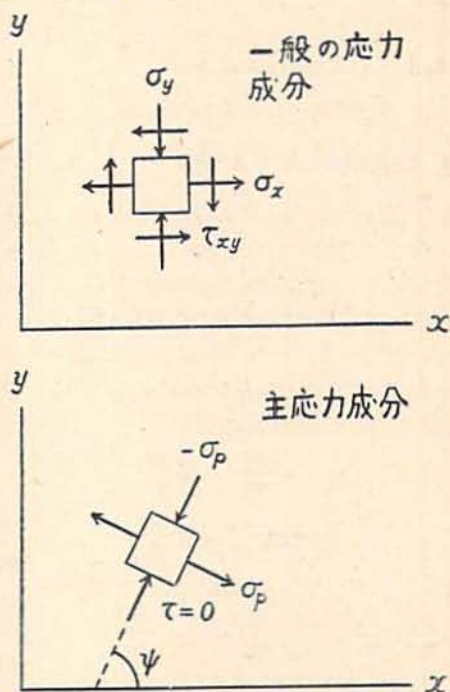
更に(3.3)式から主応力の値及びその方向を計算してみると、体積変化がないから主応力は一つが引張応力 σ_p で、他方はこれと直角な圧縮応力 $-\sigma_p$ になり、応力の絶対値は相等しい(図1)。これを一般の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ から求めると

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

となり、圧縮主応力が x 軸となす角を ψ とすると、これは

$$\tan 2\psi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

と書くことができる。



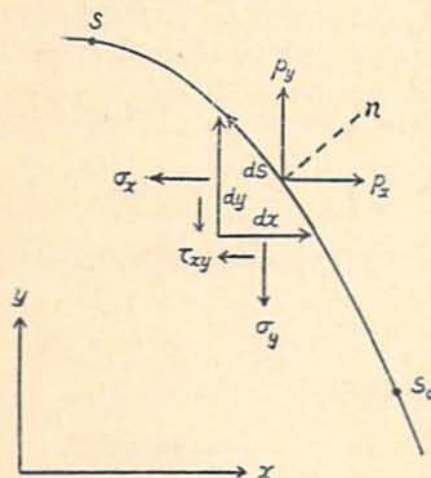
第1図 応力テンソルの変換

これらを $\phi''(z)$ を用いて表わせば, (3.3) 式を代入して

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2} |\phi''(z)| \\ \psi &= \frac{1}{2} \arg[\phi''(z)]\end{aligned}\quad (3.4)$$

が得られる。ここに $|\alpha|$ 及び $\arg(\alpha)$ はそれぞれ複素ベクトル α の絶対値及び偏角を意味するものとする。

このように、微分方程式 (3.1) を解くことは結局一つの正則函数 $\phi(z)$ を見出すことであり、更に応力の値なども (3.3) 或いは (3.4) によつてすべて $\phi(z)$ から直接求められることになるので、Airy の応力函数 U は実際には計算する必要がない。



第2図 境界面での力の釣合

§ 4. 境界条件の取り入れ方

前節に述べた如く、発破の微分方程式を解くことは ϕ の一つの正則函数 $\phi(z)$ を求めることであり、 $\phi(z)$ の形は、与えられた境界条件から定まる。

今岩石の境界が図2の様なものであつたとする。境界に沿う線分の長さを ds 、表面に立てた法線を n 、その上に働く外力の座標成分を p_x, p_y とすると、この境界面での釣合の条件は

$$\begin{aligned}p_x &= \sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \\ p_y &= \tau_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds}\end{aligned}$$

となる。これを Airy の函数 U を使って書けば、

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ p_y &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

のように書くことができる。

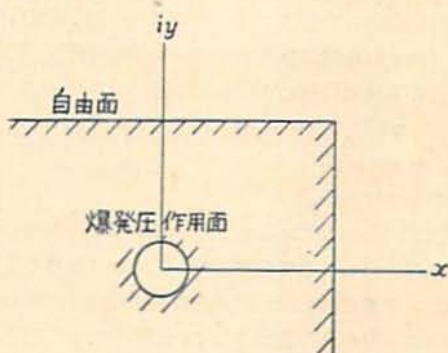
今この境界が自由面であるとする、ここでは $p_x = p_y = 0$ であるから (4.1) 式より、 $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ は s に沿つて const. になる。しかしこの定数の値は、応力の大きさには影響を及ぼさないから任意にとることができ、簡単のために 0 とおけば、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \therefore U = c$$

という条件が得られる。この定数 c もまた応力の値には無関係であるから、結局自由面の条件は、

$$U = R_s[\phi(z)] = 0 \quad \text{at free face} \quad (4.2)$$

と書いてもよい。われわれは以下 (4.2) 式を自由面の条件とする。



第3図 二重連結領域

実際発破の問題を取扱えば、自由面の他に、もう一つの境界条件として爆発に於ける爆発圧の作用面を考えなければならない。しかし調和函数は、一般には二つの境界面で囲まれたいわゆる二重連結領域で、二つの境界条件を同時に満足させることはできない (図3)。しかし爆発圧の作用が自由面までの距離に比して充分小さい円周上にあるとすれば、一つの調和函数で近似的に爆発圧の作用面の条件をも満足させることができるようになる。その方法は次の如くである。

先ず一般的に図2及び (4.1) にたしかかえて、外力 p を $p = P_n = p_x + ip_y$ と複素ベクトルの形で書くときこれの共軛複素数 \bar{p} は、(4.1) 式より

$$\begin{aligned}\bar{p} &= p_x - ip_y = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ &= i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right) = i \frac{d}{ds} \phi'(z)\end{aligned}$$

となる。従つてこれより

$$\phi'(z) = -i \int_{s_0}^s \bar{p} ds + c \quad \text{at explosive surface} \quad (4.3)$$

が一般に爆発圧の作用面での境界条件になる。ここに現れる c は、自由面ですでに函数の形をきめた以上、

勝手にとることはできない。

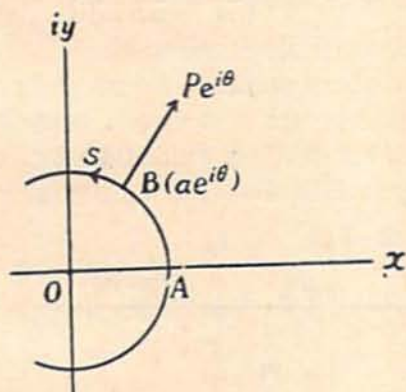
上式で特に爆発圧が原点を中心とした半径 a なる円周上に外向きに作用した場合を考慮してみる。このときは円周上の任意の一点 B の座標は $ae^{i\theta}$ で表わされ、 B 点に働く力のベクトルは、圧力の絶対値を P として $Pe^{i\theta}$ となる(図4), 故に円周上に沿うた線分を A 点から測ることにすれば, (4.3) 式はこの条件では

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= -i \int_0^\theta Pe^{-i\theta} d(a\theta) + c = aP(1 - e^{-i\theta}) + c \\ &= -aPe^{-i\theta} + c'\end{aligned}$$

となり; これを円周上での一般座標 $z = ae^{i\theta}$ を用いて書けば

$$\phi'(z) = -\frac{a^2 P}{z} + c' \quad \text{at explosive sphere} \quad (4.4)$$

となる。(4.4) 式が原点を中心として半径 a なる球面に絶対値 P なる圧力が作用しているときの境界条件である。



第4図 円形爆薬の境界条件

(4.4) 式はこの条件だけで $\phi(z)$ の形を決定してしまうので, この他に自由面の境界条件をとり入れる余地がない。しかし a が充分小さいときには自由面の条件から $\phi(z)$ をきめておいて, それが原点の附近だけで(4.4)式を満足するように選べばよい。

(4.4) 式は言いかえれば $\phi'(z)$ が $z=0$ に於いて1位の極を持つているということで, この条件だけならば任意の $\phi(z)$ を, 定数の変化によつてこの形にすることができる。以下此の方針で計算を進める。

§ 5. 等角写像による自由面の変換

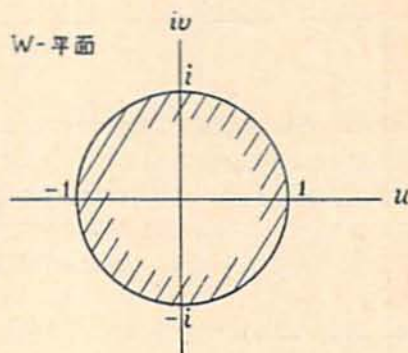
自由面で(4.2)式, 即ち

$$R_0[\phi(z)] = 0, \quad \text{at free face} \quad (5.1)$$

を満たすような函数 $\phi(z)$ を求める一般的な方法は, いわゆる等角写像の手法によるのが簡単である。

今自由面が複素平面 W 上の単位円であるような場合を考慮する(図5)と,

$$\phi(w) = m \log w \quad (5.2)$$



第5図 自由面が単位円となる W -平面

なる函数 $\phi(w)$ は, w が単位円上の点なるときに純虚数となるので, 自由面上で(5.1)式, 即ち $R_0[\phi] = 0$ を満足する。ここに m は任意の定数である。そして特に W 平面の原点が爆心にある場合には, (5.2) 式を微分した

$$\phi'(w) = \frac{m}{w}$$

は, $m = -a^2 P$ と置けば上式が爆源の中心が原点にあるときの, 爆源での条件(4.4)式を満足していることがわかる。

故に今一般的に, Z 平面上で爆心が原点にあり, 自由面が図5のように任意な形で与えられたときには, ある一つの写像函数 $w(z)$ によつて, Z 平面の自由面及び原点が, W 平面の単位円及び原点に写像することができさえすれば, このときの $\phi(z)$ は(5.2)式の $m = -a^2 P$ とおいた

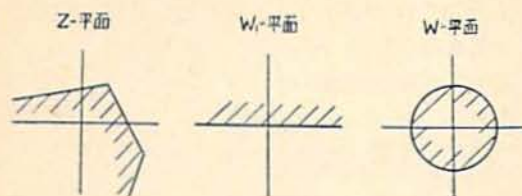
$$\phi(z) = -a^2 P \log w(z) \quad (5.3)$$

で与えられることになる。従つて問題は自由面を単位円に, そして原点を W 平面の原点に写すような, 一つの写像函数 $w(z)$ を求めることに帰着される。

複雑な形をした自由面は, これをいきなり単位円に写像するような函数を見出すことが困難である。従つてわれわれは図6に示すように, Z 平面で任意に与えられた自由面を, 先ず $w_1(z)$ なる変換によつて W_1 平面の実軸に写像し, 次いでこれを $w(w_1)$ なる変換で W 平面の単位円に写すという操作をする。

この最後の段階, 即ち W_1 平面の実軸を W 平面の単位円に写す函数は, 一般に

$$w = \frac{w_1 - \alpha}{w_1 - \bar{\alpha}} \quad (5.4)$$



第6図 一般の自由面から単位円への写像

で与えられることがわかつてい。ここに α は $f_m(\alpha)$ $\neq 0$ なる任意の複素数で、われわれはこの α を適当に選ぶことによつて、Z平面の原点がW平面の原点に一致するようにすることができる。尚 $\bar{\alpha}$ は α の共軛素数である。

残りの段階即ちZ平面で任意に与えられた自由面を W_1 平面の実軸に写像する函数 $w_1(z)$ は、自由面が曲線を含まない多角形の場合には、いわゆる Schwarz-Christoffel の変換と呼ばれるものによつて行うことができる。しかし以下に例示する多自由面の問題では写像函数は簡単に求められるので、ここでは Schwarz-Christoffel の変換の説明は省く、ただこのようにして任意の形状の自由面についても、問題を解くことが可能である点を強調しておく。

§ 6. 一自由面発破の応力

上述の結果を利用して、先ず簡単な一自由面発破の応力分布を計算する。もとの座標をZ平面上で、図7のようにとると、この自由面を実軸に写像する函数 $w_1(z)$ は簡単に求められて

$$w_1 = z - iM$$

となる。ここに M は図7からわかるように最小抵抗線の長さである。故に w はこれを (5.4) に代入した

$$w = \frac{z - iM - \alpha}{z - iM - \bar{\alpha}}$$

とすればよいことがわかる。ここで $z=0$ が $w=0$ となるように α を選べば、 $\alpha = -iM$ 、故に $\bar{\alpha} = iM$ なることがわかり、われわれの求める写像函数は

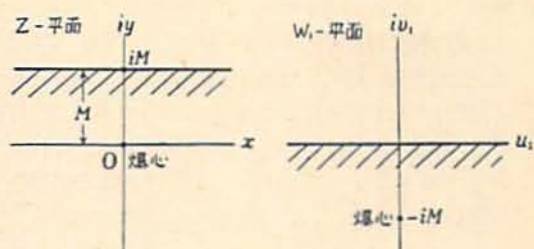
$$w = \frac{z}{z - 2iM} \quad (6.1)$$

となる。(6.1) 式が、Z平面上の自由面を、W平面の単位円に写像する函数である。

かくしてこの場合の求める正則函数 $\phi(z)$ は、(6.1) 式を (5.3) 式に代入して

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{z}{z - 2iM} \quad (6.2)$$

で与えられる。(6.2) 式が爆源での境界条件、(4.4) 式を満たしていることは次のようにしてわかる。(6.2)

第7図 一自由面問題の Z-平面と W_1 -平面を w について微分すれば

$$\phi'(z) = -a^2 P \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{2iM - z} \right\}$$

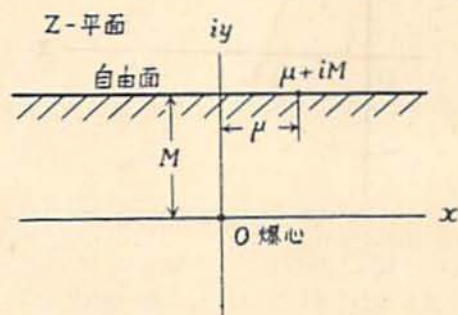
となり、爆源附近ではこれを (4.4) 式の形に書き得ることは明らかである。

岩石内の各点の主応力及びその方向は、上式を更に w で微分した所の

$$\phi''(z) = a^2 P \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(2iM - z)^2} \right\} \quad (6.3)$$

を (3.4) 式に代入すれば求められる。

このようにして、岩石内のすべての点に於ける主応力の値と方向が定まるわけであるが、筆者等は後に多自由面発破の基礎式を導くための準備として、ここでは特に自由面上の点のみについてこれを計算しておく

第8図 一自由面問題における自由面上の座標
図8の如く自由面の座標を $\mu + iM$ と置き、これを (6.3) 式に代入すれば、

$$\phi''(\mu + iM) = -4ia^2 P \frac{M\mu}{(M^2 + \mu^2)^2} \quad (6.4)$$

となり、簡単のために $\mu/M = s$ と置き、(3.4) 式を参照すれば、主応力の値が s の函数として

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \frac{s}{(1+s^2)^2} \quad (6.5)$$

で与えられることがわかる。圧縮主応力の方向は、(6.5) 式の σ_p がプラスになるかマイナスになるかによつて $\pm 45^\circ$ となる。(6.5) 式による σ_p の計算結果を表1に示す。表には係数 $(a/M)^2 P$ を省いたものが

計算してある。

表1 一自由面発破に於ける自由面上の主応力

$$\sigma_p = \left(\frac{a}{M}\right)^2 P \sigma_p'$$

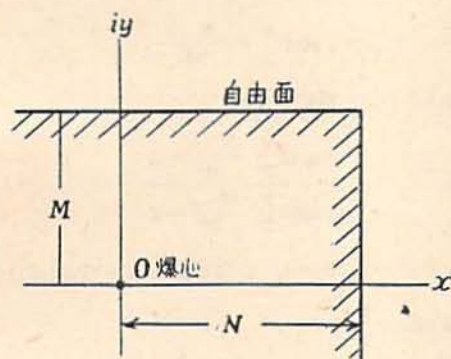
s	$\sigma_p'(s)$	s	$\sigma_p'(s)$
0.0	0.000	2.0	0.160
0.2	0.370	2.5	0.094
0.4	0.598	3.0	0.060
0.6	0.648	4.0	0.028
0.8	0.594	5.0	0.014
1.0	0.500	6.0	0.004
1.5	0.284	10.0	0.002

§ 7. 二自由面発破の応力

二自由面発破の問題では、 Z 平面上の座標を図9のようにとる。最小抵抗線の長さは、一般に二つの自由面が相異なる場合を取扱い、それぞれ M, N とする。この二自由面を実軸に写像する函数 $w_1(z)$ は

$$w_1 = (z - \gamma)^2$$

で与えられることがわかつている。ここに $\gamma \equiv N + iM$ は自由面の交点の複素平面座標である。



第9図 二自由面問題の Z -平面

w は、これを (5.4) 式に代入して

$$w = \frac{(z - \gamma)^2 - \alpha}{(z - \gamma)^2 - \bar{\alpha}}$$

となり、ここで $z=0$ が $w=0$ に対応するように α を選べば、 $\alpha = \gamma^2$ が得られる。故に $\phi(z)$ は

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{(z - \gamma)^2 - \gamma^2}{(z - \gamma)^2 - \bar{\gamma}^2} \quad (7.1)$$

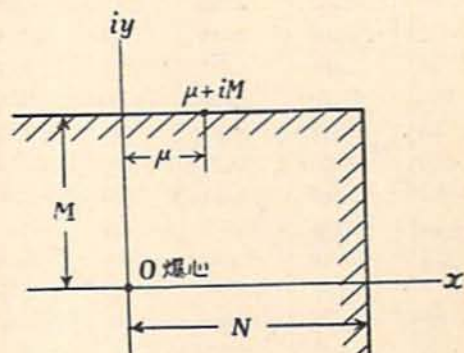
となる。(7.1) 式は図9のような自由面を持つ場合の

応力問題の解を与える正則函数である。

主応力の値及びその方向は、上式を Z で二回微分して得られる。

$$2\phi''(z) = a^2 P \left\{ \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z - 2\gamma)^2} - \frac{1}{(z - \gamma + \bar{\gamma})^2} - \frac{1}{(z - \gamma - \bar{\gamma})^2} \right\} \quad (7.2)$$

を、(3.4) 式に代入すれば得られる。



第10図 二自由面問題における自由面上の座標

ここでも自由面上の主応力の値を求めるために、自由面の座標を図10の如く $\mu + iM$ として (7.2) 式に代入すると

$$\phi''(\mu + iM) = 2a^2 P \left[\frac{M\mu}{(M^2 + \mu^2)^2} + \frac{M(2N - \mu)}{\{M^2 + (2N - \mu)^2\}^2} \right]$$

を得て、主応力 σ_p は $s = \mu/M$ の函数として

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M}\right)^2 P \left[\frac{s}{(1 + s^2)^2} + \frac{2n - s}{\{1 + (2n - s)^2\}^2} \right] \quad (7.3)$$

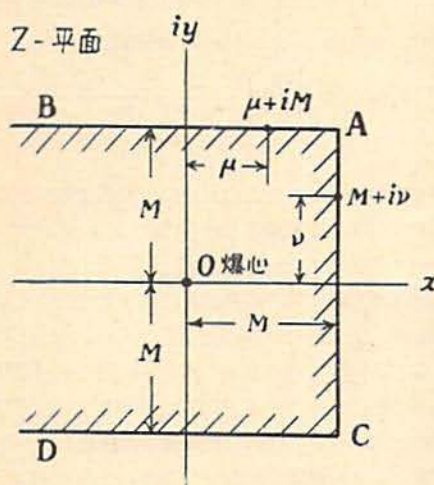
の形に表わされる。ここに n は二つの最小抵抗線の比 N/M である。圧縮主応力の方向は (7.3) 式のプラスマイナスに従って $\pm 45^\circ$ となる。

二自由面発破に於ける自由面上の主応力を与える式 (7.3) を、前に得た一自由面に於ける (6.5) 式と比較してみると、(7.3) 式は (6.3) 式の他に更に一つの項が加わった形になっている。そして言うまでもなく二自由面のときの σ_p には、二つの最小抵抗線の比 n を含んで居り、 n が無限大になつたとき、この σ_p は一自由面のそれに一致する。いろいろの n について (7.3) 式の計算結果を表2に示す。この場合には主応力が0になる点は、爆心の真上である $s=0$ より少しずれることになる。そして s のとり方は図10からわかるように、もう一方の自由面のある側をプラスとしてある。

表2 二自由面発破に於ける自由面上の主応力

s	$\sigma_p = \sigma_n / (a/M)^2 P$								
	n=5.0	2.0	1.6	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2
5.0	0.028								
4.0	0.036								
3.0	0.066								
2.0	0.164	0.320							
1.5	0.286	0.378	0.512						
1.0	0.502	0.560	0.629	0.820	1.000				
0.8	0.596	0.644	0.699	0.847	0.998	1.190			
0.6	0.650	0.692	0.735	0.849	0.968	1.147	1.297		
0.4	0.600	0.631	0.664	0.754	0.847	0.997	1.195	1.195	
0.2	0.372	0.401	0.430	0.498	0.570	0.689	0.870	1.018	0.739
0.0	0.002	0.027	0.049	0.104	0.160	0.252	0.403	0.595	0.594
-0.2	-0.368	-0.346	-0.326	-0.283	-0.241	-0.169	-0.050	0.130	0.279
-0.4	-0.596	-0.593	-0.557	-0.522	-0.490	-0.434	-0.342	-0.191	0.000
-0.6	-0.646	-0.630	-0.617	-0.589	-0.562	-0.520	-0.448	-0.329	-0.148
-0.8	-0.592	-0.578	-0.568	-0.546	-0.523	-0.490	-0.435	-0.342	-0.192
-1.0	-0.498	-0.485	-0.476	-0.457	-0.440	-0.414	-0.371	-0.300	-0.180
-1.5	-0.282	-0.272			-0.244				
-2.0	-0.160	-0.152		-0.139	-0.132	-0.123	-0.111	-0.088	-0.056
-3.0	-0.060	-0.086			-0.045	-0.041	-0.036	-0.028	-0.017
-4.0	-0.028	-0.024			-0.020				
-5.0	-0.014	-0.012			-0.008				

§ 8. 三自由面発破の応力



第11図 三自由面問題のZ-平面

次に三自由面発破の場合を取扱う。ここでは簡単のために三つの最小抵抗線の相等しい場合を考え、座標をZ平面上で図11のようにとる。この形の自由面を W_1 平面の実軸に写す写像函数 $w_1(z)$ は

$$w_1 = i \sinh \frac{\pi}{2} \cdot \frac{M-z}{M}$$

で与えられる。故に w は

$$w = \frac{i \sinh \frac{\pi}{2} \frac{M-z}{M} - \alpha}{i \sinh \frac{\pi}{2} \frac{M-z}{M} - \bar{\alpha}}$$

となり、 $z=0$ で $w=0$ となるように α を選ぶと、

$$\alpha = i \sinh \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$w = \tanh \frac{\pi}{4} \frac{z}{M} \Big/ \tanh \frac{\pi}{4} \frac{z-2M}{M}$$

が得られる。

かくして求める正則函数 $\phi(z)$ は(5.3)式より

$$\phi(z) = -a^2 P \log \left(\tanh \frac{\pi}{4} \frac{z}{M} \Big/ \tanh \frac{\pi}{4} \frac{z-2M}{M} \right) \quad (8.1)$$

なる形に得ることが出来る。故に $\phi''(z)$ は次の形となる。

$$\phi''(z) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \begin{cases} \cosh \frac{\pi}{2} \frac{2M-z}{M} \\ \sinh^2 \frac{\pi}{2} \frac{2M-z}{M} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \cosh \frac{\pi z}{2M} \\ \sinh^2 \frac{\pi z}{2M} \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

この場合自由面上の主応力を計算してみるに、図11の AB, CD の二つの自由面上では全く同じ応力分布となるが、 AC 面は又別の応力分布を示すことが予想される。故に自由面の座標を図の如く二つの自由面上でそれぞれ $\mu+iM, M+iy$ として、これを (8.2) 式に代入すれば、自由面上の主応力の値は次のようになる。

$$\sigma_p(s_1) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{a}{M}\right)^2 P \cdot \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{2}(2-s_1)}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}(2-s_1)} + \frac{\sinh \frac{\pi}{2}s_1}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}s_1} \right\} \quad (8.3)$$

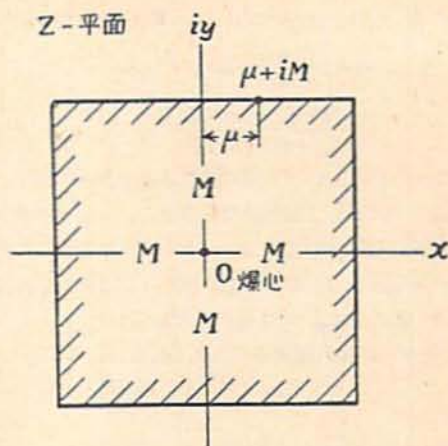
$$\sigma_p(s_2) = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{a}{M}\right)^2 P \cdot \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} s_2 \left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} s_2 \right)}{\left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} s_2 + \sinh^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} s_2 \right)^2}$$

ここに、 $s_1 = \mu/M, s_2 = \nu/M$ で、二つの式はそれぞれ図11の AB, AC 二つの自由面上の主応力を与える。(8.3) 式を計算すると、表3のような結果が得られる表中の σ_p' は σ_p から係数 $(a/M)^2 P$ を省いたものにあたる。

表3 三自由面発破に於ける自由面上の主応力

s_1	$\sigma_p'(s_1)$	s_1	$\sigma_p'(s_1)$	s_2	$\sigma_p'(s_2)$
1.0	1.80	-1.0	-0.86	0.0	0.00
0.8	1.80	-1.2	-0.67	0.2	0.87
0.6	1.75	-1.4	-0.51	0.4	1.46
0.4	1.54	-1.6	-0.37	0.6	1.73
0.2	1.00	-1.8	-0.28	0.8	1.80
0.0	0.20	-2.0	-0.20	1.0	1.80
-0.2	-0.56	-	-	-	-
-0.4	-1.03	-	-	-	-
-0.6	-1.14	-	-	-	-
-0.8	-1.04	-	-	-	-

§ 9. 四自由面発破の応力



第12図 四自由面問題のZ-平面

ここでも簡単のため四つの最小抵抗線が等しく、すべて M である場合を考える。Z平面での座標を図12の如くとると、この形の自由面を W_1 平面の実軸に写す函数は、Jacobi の楕円函数を使って

$$w_1 = \operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right)$$

で表わされる。この場合 sn 函数の二つの週期は、 $K=1.58, K'=3.16$ であり、母数は $k^2=0.030, k'^2=0.970$ となる。

故に $z=0$ で $w=0$ となる函数 w は (5.4) 式の $\alpha = i/\sqrt{k}$ に選んで

$$w = \frac{\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right) - i}{\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right) + i}$$

とすればよく、求める正則函数 $\phi(z)$ は次の形になる。

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right) - i}{\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right) + i} \quad (9.1)$$

(9.1) 式を z について2回微分すれば

$$\phi''(z) = -2 \left(\frac{a}{M}\right)^2 PK^2 \sqrt{k} (k+1)^2 i \cdot \frac{\operatorname{sn} \left(K \frac{z+iM}{M} \right) \left\{ 1 - k \operatorname{sn}^2 \left(K \frac{z+iM}{M} \right) \right\}}{\left\{ 1 + k \operatorname{sn}^2 \left(K \frac{z+iM}{M} \right) \right\}^2} \quad (9.2)$$

を得て、これから各点の主応力及びその方向が計算される。

自由面上の主応力は、図12の四つの面のどこでも対称であるから、ここでは仮に上辺をとって、その座標

$\mu+iM$ を上式に代入すれば、 $\mu/M=s$ として $\sigma_p(s)$ は

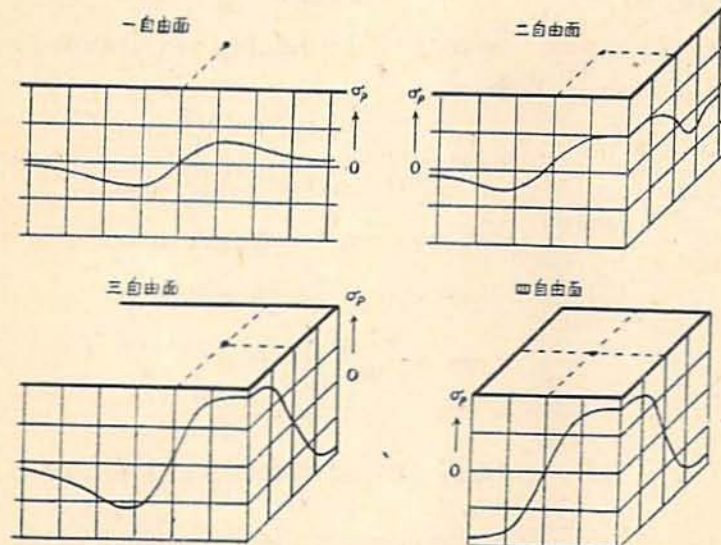
$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 PK^2 \sqrt{E(k+1)} \cdot \frac{\operatorname{sn}(Ks)[1-k\operatorname{sn}^2(Ks)]}{[1+k\operatorname{sn}^2(Ks)]^2} \quad (9.3)$$

で与えられる。(9.3)式の計算結果を表4に示す。この式は s に関して奇関数であるから、 s がマイナスになれば、それに対応する σ_p は、表4の数値にただマイナスを付したものとなる。圧縮主応力の方向は、(9.3)式の s によつて $\pm 45^\circ$ である。

表4 四自由面発破に於ける自由面上の主応力

s	$\sigma_p(s)$
0.0	0.00
0.2	0.84
0.4	1.42
0.6	1.64
0.8	1.71
1.0	1.72

以上得一自由面から四自由面のそれぞれについて自由面上の主応力の値を図によつて示せば次の図13の如くなる。図中二自由面のものは、二つの最小抵抗線の等しい $n=1$ の場合である。この四つの場合の σ_p は、いずれも前に同じ係数 $(a/M)^2 P$ がかかっているの、図の数値はこれらを省いたもの、即ち σ_p の値がとつてある。図はわかりやすいよう各自由面の位置に相当する点で主応力を縦軸にとつて立体的に描いてある。従つて自由面は各立体の上面に太線で描いたものにあたる。なお主応力の方向は $s>0$ の点では \setminus 、 $s<0$ の点では \swarrow の向きである。



第13図 多自由面発破における自由面上の主応力

§ 10. 多自由面発破の爆破係数

三次元との類推から、われわれは二次元問題の発破基礎式を

$$L = ew^2 \quad (10.1)$$

と書くことができる。ここに L は装薬量(Ladung)、 w は最小抵抗線(Widerstand)、 e はいわゆる爆破係数と呼ばれるものである。前節までは複素数を表わすのに w を用いたが、以下は発破工学の領域に入るので慣例に従つて同じ文字ではあるが、 w を最小抵抗線とする。(10.1)式を多自由面発破に適用するためには、当然自由面の数に応じて e の値が変らなければならない。一般に爆破係数 e と呼ばれているのは、すべて一自由面発破のときの e_1 であつて、これと n 自由面のときの e_n との関係については、今まで理論的な考察が下されていなかった。筆者等は前節までに得た結果を引張り主応力破壊説と結びつけて、以下のように多自由面発破の爆破係数を求めることができる。

先ず二自由面発破を考えると、このとき自由面上の主応力の値は、(7.3)式即ち

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{w} \right)^2 P \left[\frac{s}{(1+s^2)^2} + \frac{2n-s}{\{1+(2n-s)^2\}^2} \right] \quad (10.2)$$

である。ここで最小抵抗線を M から w に書き換へてある。同様に一自由面発破のときは

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{w} \right)^2 P \frac{s}{(1+s^2)^2} \quad (10.3)$$

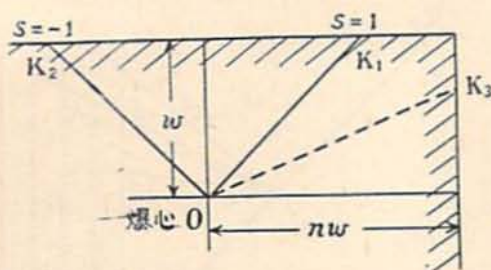
である。

一自由面発破の漏斗指数は、筆者等が前報に述べた如く、標準装薬では1.3~1.4となる。しかし岩石に体積変化がないとすると、この値は1.0である。本報では体積変化がないという考え方にもとづいているので、以下一自由面発破の漏斗指数が1.0になるものとして議論を進める。

図14は二自由面の場合であるが一自由面では図の K_1, K_2 にあたる点が漏斗孔の淵点にあたり、この点の主応力の値は、 $s=\pm 1$ を(10.3)式に代入して

$$\sigma_p^K = \pm \frac{P}{2} \left(\frac{a}{w} \right)^2 \quad (10.4)$$

となる。しかし図に示すような



第14図 標準装薬の漏斗孔

二自由面発破では、 K_1 、 K_2 二つの点の主応力は等しくならず、表2からわかるように、主応力を絶対値で比較すれば、 K_1 点の方の値が大きい。従つて二自由面発破の標準装薬を定義するにあつて、一自由面の場合との関係から K_1 又は K_2 が漏斗孔の淵点となるものを選ぶ必要があるが、このうち K_2 点を淵点にするように選んだ方がよいことがわかる。即ち K_2 を淵点とすれば K_2 点と主応力の等しくなる点は K_1 よりも遠い点例えば K_3 点のような所に来て、漏斗孔の頂角は 90° よりも大きくなり、実際の例によくあてはまるが、逆に K_1 点を基準にとると、漏斗孔の頂角は 90° よりも小さくなってしまふからである。

さて一自由面及び二自由面での発破基礎式を、最小抵抗線の等しい場合にそれぞれ

$$L_1 = c_1 w^2 \quad (10.5)$$

$$L_2 = c_2 w^2 \quad (10.6)$$

と書く。

二自由面のときの K_2 点での主応力の絶対値は、(10.2) 式に $S=-1$ を代入して

$$|\sigma_p K| = \frac{P}{2} \left(\frac{a}{w} \right)^2 \left[1 - \frac{4(2n+1)}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2} \right] \quad (10.7)$$

となるが、これは一自由面の場合の、 K_2 点の主応力の絶対値、即ち (10.4) 式で与えられる

$$|\sigma_p K| = \frac{P}{2} \left(\frac{a}{w} \right)^2 \quad (10.8)$$

よりも小さい。従つて二自由面の場合には、 K_2 点まで漏斗孔を生ぜしめるためには、(10.7) 式で与えられる主応力の値を、(10.8) 式のそれに等しくなるまで引き上げることが必要である。このためにはもちろん装薬量を増さなくてはならない。しかし装薬を増しても P の値は変わらないので、結局装薬量の変化は、装薬半径 a の変化として (10.7) 式に現れてくる。

今一自由面、二自由面発破のときの、標準装薬に相当する装薬半径をそれぞれ a_1 、 a_2 とする。こうすると標準装薬の條件は、同じ K_2 点で主応力の絶対値が等しくなること、即ち

$$\frac{P}{2} \left(\frac{a_2}{w} \right)^2 \left[1 - \frac{4(2n+1)}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2} \right] = \frac{P}{2} \left(\frac{a_1}{w} \right)^2$$

より

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 = 1 - \frac{4(2n+1)}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2}$$

となる。ここで二次元の場合には、 a^2 が装薬量に比例することを考えれば、一自由面、二自由面発破の標準装薬量 L_1 、 L_2 は、次の関係で結ばれていることがわかる。

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{4(2n+1)}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2} \quad (10.9)$$

(10.9) 式を (10.5)、(10.6) 式と比較すれば、二自由面発破の爆破係数 c_2 は、一自由面発破の爆破係数 c_1 を使つて

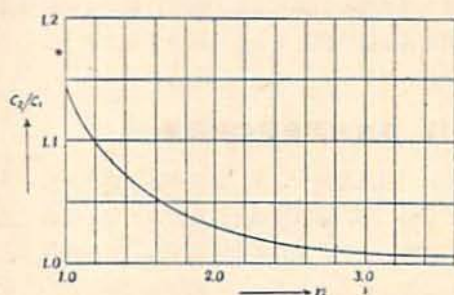
$$c_2 = \frac{\{(2n+1)^2 + 1\}^2}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2 - 4(2n+1)} c_1 \quad (10.10)$$

と書くことができる。

(10.10) 式をいろいろの n について計算してみると図15のようなグラフが得られ、 $n \rightarrow \infty$ の極限に於いてはこれは一自由面発破となるから $c_2 = c_1$ となる。特に $n=1.0$ の場合には

$$c_2 = 1.14c_1 \quad (10.11)$$

となり、この場合は二つの自由面の条件が全く同じであるから、漏斗孔の形状は頂角 180° 、従つて採石量は一自由面標準装薬の丁度 2.0 倍に等しい。そしてこのための装薬量は (10.11) 式からわかるように、一自由面標準装薬の 14% 増しにすればよいのである。

第15図 c_2/c_1 の n による変化

同様のことを前に得た三自由面、四自由面発破についても行つてみると、これらの場合の K_2 点の主応力の絶対値は、それぞれ表3、表4より

$$|\sigma_p K| = 0.86 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \quad \text{三自由面}$$

$$|\sigma_p K| = 1.72 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \quad \text{四自由面}$$

となり、これらが一自由面標準装薬のときの (10.8) 式に等しくなるように a_3 、 a_4 を選べば

$$\left(\frac{a_1}{a_3}\right) = \frac{L_1}{L_3} = \frac{1}{2 \times 0.86} = 0.58$$

$$\left(\frac{a_1}{a_4}\right) = \frac{L_1}{L_4} = \frac{1}{2 \times 1.72} = 0.29$$

より、結局

$$c_3 = 0.58c_1 \quad (10.12)$$

$$c_4 = 0.29c_1 \quad (10.13)$$

を得る。即ち三自由面、四自由面発破では、一自由面発破に比してそれぞれ3.0倍、4.0倍の岩石を掘り起すための薬量は、58%及び29%で済むことになる。普通の坑道式大発破は三自由面発破に類似の場合が多いから、その爆破係数の値は普通発破の時の値の半分程度で良いことは(10.12)から当然である。

多自由面発破の爆破係数については、今まで理論的に導き出されたものが全くない。実験から経験的に割出した値には

$$c_2 = c_1, \quad c_3 = 0.66c_1, \quad c_4 = 0.5c_1,$$

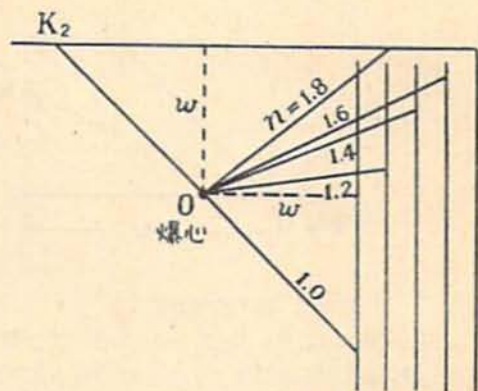
$$c_5 = 0.4c_1, \quad c_6 = 0.25c_1$$

というのが Peele⁹⁾ の Handbookによつて与えられている。この値は三次元のデータであるが、これを筆者等の二次元の理論値と比較すると、二次元での二自由面は三次元でも二自由面に、二次元での三自由面は三次元での三、四自由面に、二次元での四自由面が三次元での五、六自由面に、それぞれ対応することを考えると両者の値はかなりよく一致していることがわかる。

即ち筆者等の引張り主応力破壊に基づく発破理論は多自由面発破に関してもよく適合すると云うことが出来る。

§ 11. 多自由面発破の採石量

われわれは前節で、 K_2 点での破壊条件から、多自由面発破の際の爆破係数を計算した。そして最小抵抗線が相等しい二、三、四自由面では、この条件で決められる漏斗孔の大きさは、一自由面発破に比してそれぞれ2、3、4倍となる。しかし最小抵抗線がそれぞれ異なる一般の場合には、漏斗孔の形状を定めるもう一方の淵点は、そこでの応力が K_2 点と同じになるという条件から、改めて計算によつて求めなければならない。二自由の場合には、 n がいろいろ変つたときの自由面上の主応力の値は(7.3)式から求められるので、これが K_2 点の主応力、即ち(10.7)式に等しくなるようなもう一方の淵点が算出可能である。しかしそれを一般式で書くことはむずかしいので、次に二、三の n について計算結果を図示すると、図16のようになる。



第16図 n を異にする二自由面発破の漏斗孔の淵点の位置

図で K_2 点は標準装薬の条件から n の如何に拘らず一定になるが、もう一方の淵点、即ち図14の K_2 点に相当する点は n とともに変化することがわかる。そして n が大きくなるとともに漏斗孔の形状は、一自由面のそれに近づき、 $n=2.0$ 附近ではほとんど一自由面と変わらないことになる。

図16から n の異なる場合の漏斗孔の形状、従つて掘り起される岩石の量も求められるので、これを三自由面及び四自由面の結果と並べてみると表5のようになる表には更にそれぞれに対応する標準装薬量及び単位薬量あたりの採石量も並記した。単位はすべて一自由面標準装薬のときの値を、1.00としてある。三自由面、四自由面は前述の如く、最小抵抗線の長さがすべて相等しい場合のものである。

表5 標準装薬にしたときの採石量と薬量

自由面	採石量	薬量	採石量 薬量
一自由面	1.00	1.00	1.00
二自由面			
$n=2.0$	1.05	1.03	1.02
$=1.8$	1.08	1.04	1.04
$=1.6$	1.21	1.05	1.17
$=1.4$	1.42	1.07	1.33
$=1.2$	1.64	1.10	1.49
$=1.0$	2.00	1.14	1.76
三自由面	3.00	0.58	5.17
四自由面	4.00	0.29	13.8

表5より明らかな如く、自由面の数が増すことに、標準装薬とれる単位薬量あたりの採石量は著しく増加し、特に三、四自由面では、その値は一自由面のそ

れに比して、それぞれ約 5.2 及び 14 倍の多きに至ることになる。また二自由面発破では、 n の値はできるだけ 1.0 に近づけることが経済的発破となることがわかる。

同様に考えて、われわれは一自由面発破のときの標準装薬量を用いて多自由面の発破を行った場合の、漏斗孔の形状を決めることもできる。それには同じ a による多自由面発破の自由面上の応力値が、一自由面の K_2 点のそれに等しくなるような点を漏斗孔の淵点とすればよい。こうした場合の採石量の計算結果を示すと、表 6 のようになる。

表 6 一自由面発破の装薬を用いたときの採石量

自由面	採石量
一自由面	1.00
二自由面	
$n=2.0$	1.03
$=1.8$	1.06
$=1.6$	1.19
$=1.4$	1.38
$=1.2$	1.53
$=1.0$	1.80
三自由面	3.40
四自由面	4.00

表 6 の値は、このまま単位装薬あたりの採石量に等しく、表 5 の第 4 行と比較されるものである。これを較べてみると、三、四自由面では明らかに標準装薬にした方が経済的であるが、二自由面発破のときは、むしろ一自由面発破の標準装薬量をそのまま用いた方が僅かながら有利であることがわかる。

§ 12. 結 論

筆者等は、一般的多自由面発破に於ける岩石内の応力分布を求め、特にその自由面上での応力値から発破基礎式を導き出したが、本報に得られた結果をまとめると次のようになる。

- (1) 岩石を非圧縮性、且つ二次元的広がりを持つものと考え、いわゆる応力函数と呼ばれる Airy の函数 U は、調和函数に還元される。
- (2) 調和函数は、周知のごとく、一般に複素平面座標 z の任意函数 $\phi(z)$ の実数部分で表わされる。ここでは岩石内に爆心を源点とする複素平面座標を、 z とすると、 $\phi(z)$ は次の二つの境界条件

$$\text{自由面にて } R_n[\phi(z)] = 0$$

$$\text{爆心にて } \phi''(z) = -a^2 P \frac{1}{z} + c$$

を満足するように選ばばよく、この $\phi(z)$ によつて各点の主応力値 σ_p 、及び圧縮主応力の方向 ψ が次のように表わされる。

$$\sigma_p = \frac{1}{2} |\phi'(z)|$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arg[\phi'(z)]$$

- (3) 一般には、上の二つの境界条件を同時に満足するような函数 $\phi(z)$ が求められないので、筆者等は自由面での境界条件を厳密に満足し、爆心で、の条件は近似的に満たすような函数の求め方を考えた。この近似は、爆薬の半径が最小抵抗線に比して充分短いときには正しい解を与えるような種類のものである。
- (4) 筆者等は、各自由面への最小抵抗線が相等しい場合の三自由面及び四自由面発破、並びに二つの最小抵抗線の比が任意であるときの二自由面発破の際の岩石内の応力分布を、それぞれ計算した。
- (5) 特に自由面上での主応力の値から、二次元問題の発破基礎式を

$$L = cv^2$$

としたときの爆破係数 c を求めることができた。それによると、一自由面のときの爆破係数を c_1 とすると、二自由面のときの爆破係数 c_2 は、二つの最小抵抗線の比を n として

$$c_2 = \frac{\{(2n+1)^2 + 1\}^2}{\{(2n+1)^2 + 1\}^2 - 4(2n+1)}$$

で与えられる。上式で $n \rightarrow \infty$ とすれば、一自由面発破であり、もちろん $c_2 = c_1$ となる。

- (6) 最小抵抗線の長さが相等しいときは、二自由面では $c = 1.14c_1$ 、三自由面、四自由面ではそれぞれ $c_3 = 0.58c_1$ 、 $c_4 = 0.29c_1$ が得られ、この値は Peele の Mining Engineer's Handbook に記載の実験値と概ねよく一致する。即ち筆者等の引張り主応力破壊に基づく力学的発破理論は多自由面発破の問題にもよく適合すると言ふことが出来る。
- (7) これらの爆破係数から計算された装薬量を用いて発破を行うときの単位装薬あたりの採石量は、一自由面発破のときのそれを 1.00 として二、三及び四自由面では、それぞれ 1.76、5.17 及び 13.8 となる。
- (8) 二自由面発破のときは、一自由面のときと同一装薬量を用いて発破した方が単位装薬あたりの採石量は僅かながら大となる。しかし三及び四自由面発

破では、それぞれ爆破係数 c_3, c_4 から計算した薬量による方が、ずっと経済的である。故に最も経済的な爆破係数と、その場合の単位薬量あたりの採石量を、各自由面の数の場合について記せば次表の如くなる。

表7 最も経済的な爆破

	爆破係数	採石量の比
一自由面発破	c_1	1.00
二自由面	$c_2=c_1$	1.80
三自由面	$c_3=0.58c_1$	5.17
四自由面	$c_4=0.29c_1$	13.8

本研究に当り、名古屋工業大学土木工学科岡林稔教授に調和函数の解法に関し指導して戴き、又能本大学

の清田堅吉教授にも色々示唆していただいたことを附記し謝意を申し述べる。

文 献

- 1) 村田勉・田中一三：工火協誌 15, 294 (1954); 16 32 (1955)
- 2) 村田勉・田中一三：工火協誌 17, 19 (1956).
- 3) 岡林稔：「任意の境界を有する二次元弾性体がその境界条件として境界上の応力分布が与えられる場合の一般解法について」土木学会論文集No. 4, 5 (1948).
- 4) R. Peele: Mining Engineer's Handbook, Vol. I, p. 5-11 (1950).

Mechanical Theory of Rock Blasting

With Multi Free Faces

by

Tsutomu Murata and Kazumi Tanaka

1. Introduction.

We have proposed a new theory¹⁾ of rock blasting based on fracture by principal tensile stresses produced by explosive pressure. And the theory can explain almost all problems of industrial blasting in the case of one free face.

We can find many papers concerning one free face blasting either of theoretical or practical treatment. But it is difficult to find out the theoretical research paper which has treated the multi free faces blasting such as two free faces, three free faces or more free faces. The reason why there is no report on multi free faces blasting may owe to the difficulty of mathematical calculations under such complicated conditions.

Here we will treat theoretically the problem of multi free faces blasting by simplifying it in two dimensional problems.

2. Differential Equation of Blasting.

In the previous papers¹⁾, we have intro-

duced the equation of blasting in the next differential forms

$$\nabla^2 f = -\Theta, \quad \nabla^2 \Theta = 0 \quad (1)$$

where f is a strain potential and Θ is a dilatation, and they are defined from displacement vector u and strain tensor ϵ_{ij} respectively as follows

$$u = -\text{grad } f, \quad \Theta = \sum_i \epsilon_{ii} \quad (2)$$

In the two dimensional problem, it is better to use Airy's stress function than the strain potential. Using Airy's function U , we can write down the stress tensor components as follows:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3)$$

It is easily proved that Airy's function must satisfy the next relation when the rock is assumed to be incompressible

$$\nabla^2 U = 0. \quad (4)$$

We will use the above equation (4) as the differential equation of blasting in two dimensional problems, in which U is

a so-called harmonic function.

3. Boundary Conditions of Blasting.

In two dimensional problem, it is prefer to transform the real coordinates to the complex coordinates on complex plane Z . Considering any regular function $\phi(z)$ on Z -plane and dividing it into the real and imaginary parts, either of these parts becomes to a harmonic function. Then we can obtain the next form as a solution of equation (4),

$$U = R_e[\phi(z)] \quad (5)$$

where R_e is a notation of the real part of adjoining bracket.

The boundary conditions of blasting, as conditions of governing the required regular function $\phi(z)$, can be written as follows;

$$U = R_e[\phi(z)] \quad \text{at free face} \quad (6)$$

$$\phi'(z) = -\frac{a^2 P}{2} + \text{const.}$$

$$\text{at explosive sphere} \quad (7)$$

where P is the pressure of explosion, a is the radius of explosive sphere and prime means the derivative with respect to the variable z .

4. Transformation of Free Face by Conformal Representation.

By the aid of Schwarz-Christoffels' theorem, we can find a mapping function which represents a presented arbitrary free face in Z -plane to the unit circle in W -plane (Fig. 1). Using above mapping function $W(z)$, we can obtain required function $\phi(z)$ in the form

$$\phi(z) = -a^2 P \log W(z) \quad (8)$$

which is satisfied by the boundary condition at free face (5), and approximately contented with that of explosive sphere (7) by selecting the included constant in $W(z)$ so as to the origin of Z -plane

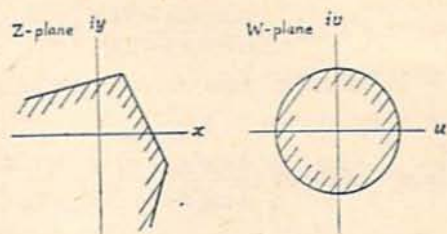


Fig. 1 Conformal mapping of arbitrary free faces.

corresponds to that of W -plane.

Then required regular functions of each number of free faces are expressed as follows;

(i) In the case of one free face blasting

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{M}{z - 2iM} \quad (9)$$

where M is the least resistance.

(ii) In the case of two free faces blasting

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{(z - \gamma)^2 - \gamma^2}{(z - \gamma)^2 - \bar{\gamma}^2} \quad (10)$$

where γ is the complex coordinate of intersection made up by two free faces and $\bar{\gamma}$ is the conjugate complex of γ .

(iii) In the case of blasting with three free faces with same least resistances

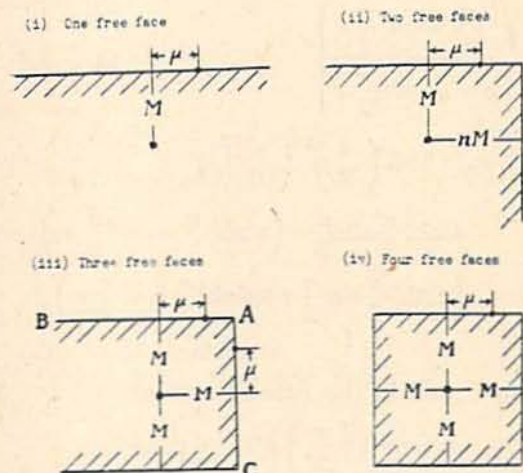


Fig. 2. Coordinates in the case of one or multi free faces.

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{\tan \operatorname{am}[\pi z/4M]}{\tan \operatorname{am}[\pi(z-2M)/4M]} \quad (11)$$

(iv) In the four free faces with same least resistances

$$\phi(z) = -a^2 P \log \frac{\sqrt{k} \operatorname{sn}[K(z+iM)/M] - i}{\sqrt{k} \operatorname{sn}[K(z+iM)/M] + i} \quad (12)$$

where sn is Jacobi's elliptic function of modulus k .

Taking the coordinates of free faces in the above cases as in Fig. 2. and putting $\mu/M = s$, we can obtain the principal stresses σ_p on free faces as follows, respectively,

(i) in the case of one free face

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \frac{s}{(1+s^2)^2} \quad (13)$$

(ii) in the case of two free faces with ratio of two resistances n

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \left[\frac{s}{(1+s^2)^2} + \frac{2n-s}{\{1+(2n-s)^2\}^2} \right] \quad (14)$$

(iii) in the three free faces

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi}{2} (2-s)}{\cosh^2 \frac{\pi}{2} (2-s)} + \frac{\sinh \frac{\pi}{2} s}{\cosh^2 \frac{\pi}{2} s} \right\} \quad \text{at face } AB$$

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P \frac{\sinh \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} s \left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} s \right)}{\left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} s + \sinh^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} s \right)^2} \quad \text{at face } AC \quad (15)$$

(iv) and in the four free faces

$$\sigma_p(s) = 2 \left(\frac{a}{M} \right)^2 P K^2 \sqrt{k} (k+1) \frac{\operatorname{sn}(Ks)[1 - k \operatorname{sn}^2(Ks)]}{[1 + k \operatorname{sn}^2(Ks)]^2} \quad (16)$$

5. Blasting Coefficients in Multi Free Faces Blasting.

We can express simply the relation between a charge weight L and the least resistance w as follows in two dimensional problems

$$L = cw^2. \quad (17)$$

Then the blasting coefficient must vary with number of free faces, and if each coefficient of blasting is written to e_1, e_2, e_3 and e_4 corresponding to one, two, three and four free faces respectively, we can prove that they are connected with next relations,

$$\begin{aligned} e_2 &= e_1 \\ e_3 &= 0.58e_1 \\ e_4 &= 0.29e_1 \end{aligned} \quad (18)$$

where in each cases of two or more free faces, the least resistances are taken to be the same length.

The volume of rock to be blasted by the same explosive charge in the case of any number of free face should increase according to the number of free face, and number their comparative volume are tabulated in Table 1.

Number of free face	Volume of rock to be blasted
One free face	1.00
Two free faces	1.80
Three free faces	5.17
Four free faces	13.8

Table 1. Comparison of volume of rock to be blasted in different free faces.

Also the shape of crater can be determined from numerical results obtained in preceding article. For example, in the case of two faces, the shape of crater in each n (ratio of two resistances) is shown as in Fig. 3.

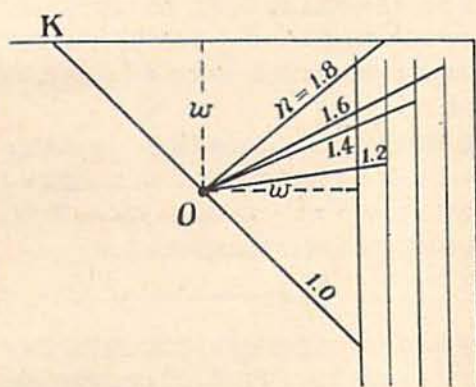


Fig. 3. Shape of craters in the case of two free faces blasting with different n (ratio of two resistances)

These theoretical data are well coincident with experimental data of Peele's "Mining Engineers' Handbook" Vol. 1. p. (1950)²⁾. So, our new blasting theory may be considered as truthful one to be applied to industrial blasting problems.

Literature Cited

- 1) T. Murata and K. Tanaka; J. Ind. Explosive, Japan 15, No. 4, 294 (1954), 16, No. 1, 32 (1955), 17, No. 1, 19 (1956).
- 2) R. Peele; "Mining Engineers' Handbook", Vol. 1, p. 5~11 (1950).

石炭中に混入した不発電気雷管類 の検出装置に就いて

昭和31年6月11日受理

馬場 文夫** 山田 正幸*

§ 1. ま え が き

木材、プラスチック、食料品を始め薬品、煙草等の諸物質内に混入した鉄並に非鉄金属を検出する要望は近時著しく増大して来た。物質内の浮遊金属がマグネチックで且物質から容易に分離出来る場合は磁気分離方式 (Magnetic Separation Method) に依つて極めて簡単に此の問題は解決される。探鉱された石炭中に混入した不発電気雷管類は通常鋼製管体であり、又脚線の一部が附随して居る事が往々ある為上記の磁気分離方式を利用する事は不可能である。

茲に報告する金属検出方法はコンベアで流れて居る石炭中に混在した電気雷管類が鋼製、鉄製及びコーベニヤ製何れであつても、又脚線の有無に拘らず検出して警報を鳴らすとか、ソレーを作動して不発雷管類の混在した部分の石炭の流れの中から分離排除しよう

とするものである。

§ 2. 原理的考察

金属検出装置は戦時中地雷及び機雷の検出目的を以て研究されたが、戦後我が国では前項の諸目的の需要が増したに拘らず其の実用に供された国産機器の報告を見ない現状である。

金属検出装置の動作原理は安定な発振器で励起された共振コイルの近傍又は其の中を金属が通過する事に依つて、高周波磁場の擾乱 (Distortion) を起し、其の結果コイルの Q に変化を与え検出コイルに小さな電圧変化を誘起させるものと考えられる。検出金属が強磁性体であるか、非磁性体であるかに依つて Q の変化率が異なり、又励磁周波数も影響する。第1図は金属検出装置の原理を表はすもので Three coil metal detecting 方式である。

次に励磁周波数を決定する為に第2図に示す如き基本回路に於て、周波数可変の発振器出力を抵抗とイン

* 日本火薬株式会社 仁豊野作業所

** 三菱電機株式会社 無線機製作所