研究論文

段発発破による発破振動の軽減（第2報）

多重層の振動シミュレーション

田　中　一　三*

前報で実験したような一次元モデルとみなされる弾性的多重層について，一方から圧力波が入射したときの，波の伝播をシミュレートするプログラムについて述べた。シミュレートから得られる波形は実験とかなり良く一致し，そのことからも，前報の実験が線形的な重ね合わせを許すことが予想された。

1. 緒言

筆者は小型モデルを使って発破地振動の測定実験を行ったが[1]，それを補足する意味で，実験条件に合わせた一次元の地振動伝播のシミュレーション計算を試みたので，その内容を報告する。

地盤中に弾性インピーダンスの異る層がいくつも混っていると，波は層の境界で透過と反射をくりかえす。発破のように爆源で発生する波が単純な場合でも，このような層を通ったあとの波形は，その地層固有の振動数を含んだものとなる。この種の振動は連続体を扱うので，一般的に周波数の計算等も容易ではない。

ここで行ったシミュレーションは，一度プログラムを作ってしまえば，条件に合わせた計算は簡単なものとなる。計算結果と実験との一致も，前報に述べたように良好であった。

2. 圧力波の性質

ここでは一次元の弾性波モデルを考える。変位がx方向だけの一次元問題では，応力成分もσ_{xx}だけしか存在しない。それを以下σと書くことにする。

本文ではさらに，応力σの代りに，$p=-\sigma$で定義される量を圧力と呼ぶことにする。これは発破の爆源での圧力と直接結びつけられるようにするのと，衝撃波などで周知の，粒子速度uとの関係，

$$p=\pm Zu \tag{1}$$

を用いるためである。

上式でZは媒体のインピーダンスで，ρを密度，cを波の伝播速度とすると，

$$Z=\rho c \tag{2}$$

の関係がある。(1)式右辺の複号は，波の進行方向のプラス（前進波），マイナス（後退波）に対応する。ただしuの符号は，xのプラス方向への動きを正にとるものとする。

Fig.1で，多重層Mを通過する前後の波を示した。ここで入射波の圧力p_Iと，粒子速度u_Iの間には，

$$p_I=Z_Iu_I \tag{3}$$

の比例関係がある。同様に多重層を通り抜けた波についても，

$$p_T=Z_Tu_T \tag{4}$$

が成り立つであろう。Z_I, Z_Tは，図に示したそれぞれの場所のインピーダンスである。

上式では，入射波，透過波のどちらも，単純な前進波と考えた。多重層の中では，インピーダンスの異る境界で反射があるため，前進波と後退波が混在する。このようなところでは，pとuの比例係数は，$+Z$と$-Z$の2成分が混り合うため，(3)，(4)式のような簡単な形には書けなくなる。

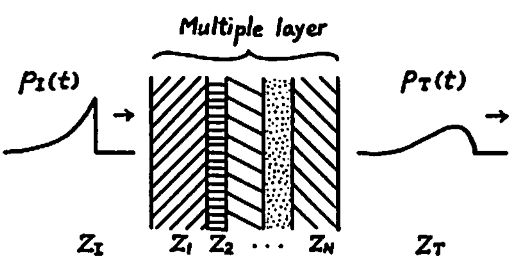

Fig.1　Transmission of the pressure wave through a multiple layer.

その意味では，本当はFig.1の入射波に対しても注

昭和56年3月6日受理
*化学技術研究所
〒305 茨城県筑波郡谷田部町東 1−1
TEL 0298-54-4792

意が必要である。例えば多重層の手前の1点で$u(t)$を測り，それが入射波の圧力波形$p_1(t)$と相似だと考えることはできない。なぜならば，ここには多重層からの反射波が混っているからである。ただしその反射波は単純な後退波であるから，多重層の手前の2点で波形を測れば，時間のずれから入射波と反射波の分離が可能となるであろう。

多重層の内部では，このような分離はほとんどできない。一般的にpとuは独立に変化しうる量で，両者を与えてはじめて状態がきまるという考え方になる。

多重層の構造が簡単な場合は，インピーダンスの比できまる反射係数から，丹念にp, uの変化を計算して行くことが可能である[2]。あるいは入射波と透過波の関係に絞れば，周波数特性の形で多重層の共振周波数を計算することもできる[3]。しかしこうした直接的方法は，層の構造がちょっと複雑になると飛躍的に計算が面倒になる。以下に述べるシミュレーションの手法は，それに対して，一度プログラムさえ作っておけば，条件の複雑さと全くかかわりなく計算を進めることができる利点を持っている。

3. 弾性波の方程式

先の(1)式は，厳密に言えば，有限振幅の波に対しては，波頭での不連続な変化に対して$\Delta p=Z\Delta u$の形で書かれるべきものである。これが時間的に変化する波形の全体お対して，$p(t)=Zu(t)$とみなせるためには，p, uがともに微少量であるとの仮定を要する。本文ではその仮定に従う。それは波を弾性波と考えることに外ならず，次のような方程式が導かれる。

一次元弾性体内で，応力σが場所によって変化するとき，長さΔxの微少部分には単位面積あたり$(\partial\sigma/\partial x)\Delta x$の力が作用する。その結果生ずる加速度が$\partial u/\partial t$に等しいことから，次の運動方程式が得られる。

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

一方，応力σとひずみεの間には，弾性係数をkとして，

$$\sigma=k\varepsilon$$

の関係がある。変位をξと書くと，$\varepsilon=\partial\xi/\partial x$であるから，上式の両辺を時間$t$で微分し，$u=\partial\xi/\partial t$を導入すると，

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=k\frac{\partial u}{\partial x}$$

が得られる。前節で定義した$p=-\sigma$を使って書き直すと，p, uに関して対称的な式，

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

が得られる。

実は(5)式は，x方向に長無損失のケーブル上を伝播する電気信号の方程式，

$$L\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{\partial E}{\partial x},\quad C\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x} \tag{6}$$

と同形である[4]。ここにIは電流，Eは電圧，LとCはケーブルの単位長あたりのインダクタンスとキャパシタンスである。
無損失ケーブルの特性は，LとCの二つの定数できまるが，その代りになる定数を，

$$Z=\sqrt{\frac{L}{C}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

のインピーダンスZと，信号電播速度cの二つにとることもできる。上の関係を，同じ形の方程式を持つ弾性体の式に書き直せば，よく知られた式，

$$Z=\sqrt{k\rho},\quad c=\sqrt{\frac{k}{\rho}} \tag{7}$$

が得られる。

無損失のケーブルを伝播する電気信号は，その途中で減衰することなく，境界点での反射等のない限り，同じ波形を保って伝播する。このことは，一次元弾性波についても同様である。

4. シミュレーションの方法

Fig.2 上のように，x方向に長い媒体の端$(x=x_0)$に圧力$p(t)$が加わったとき，媒体内の各点での$p(x, t)$, $u(x, t)$を求めることを目的とする。計算に先立って，媒体の多重層としての特性（各境界の座標x_iと各層の弾性的性質Z_i, c_i）は与えられており，端に加える圧力$p(t)$も時間の関数として与えられるもの

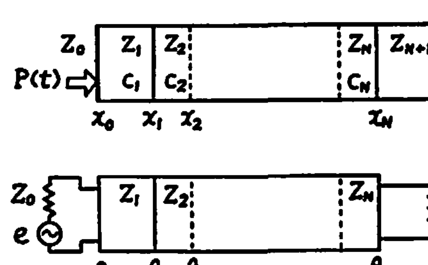

Fig.2 Treatment of the problem by the analogy of electric signal through lossless cables.

とする。初期条件では，いたるところで$p=0$, $u=0$とする。計算は時間を追う形で進み，ある時刻でのp

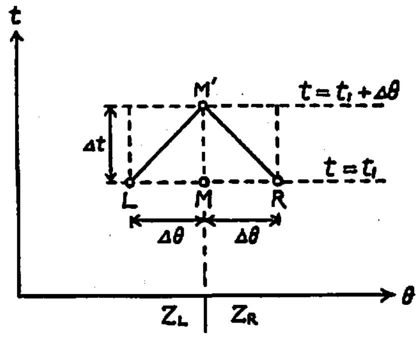

Fig. 3 Comptation by finite method.

(x), $u(x)$から，Δt 後の $p(x)$, $u(x)$ を求め，このサイクルを所要の時間が経過するところまで繰り返す。

計算の基礎は，(5)式の微分方程式である。これを変形すると次のような連立方程式になり，結果は計算量が多いだけで，簡単な加減乗除のくりかえしになる。このような作業はコンピューターにまかせるのに最適である。

(5)式は変形して，(7)式の Z, c を用いて書くと，

$$Z=\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+Zc\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{8}$$

となる。この形は，波動方程式の解法に用いられる特性曲線法によると簡単化される。すなわち特性曲線は，

$$x/c-t=\alpha \tag{9}$$

$$x/c+t=\beta \tag{10}$$

であり，これらに沿って(8)式は，

$$p+Zu=\mathrm{const.} \tag{11}$$

$$p-Zu=\mathrm{const.} \tag{12}$$

と変形される[5][6]。

(9), (10)式で，αが一定の特性曲線は，プラス方向への前進波を，βが一定の曲線は，マイナス方向への後退波を表わしている。これらは (x, t) 平面上の直線で表わされる。

多重層の中では波の透過と反射が複雑に入り乱れる。その軌跡を (x, t) 平面上に描くことを考えると，各層で波の伝播速度 c_i が異るので，軌跡は層ごとに勾配の違った折線になるであろう。そこで今，長さxの代りに，

$$\theta=x/c \tag{13}$$

できまるθをとる。θは波の伝播所要時間である。多重層の各層の厚さを，それぞれの c_i を使って上式で変換し，例えば $x=1\,\mathrm{m}$ の層という代りに，$\theta=1\mathrm{msec}$ の層というようにする。このような変換をして (θ, t) 平面を考えると，その上では波の伝播軌跡は層の種類によらず，すべて同じ傾き（± 1）の直線になる。

Fig. 2 上のように，x_i, Z_i, c_i で与えられた多重層の特性は，(13)式を用いて，Fig. 2 下のように θ_i, Z_i のみで表わすことができるようになる。この場合 c_i は θ_i の中に含まれて，見かけ上のパラメーターからは消去される。

問題はこうして，(x, t) 座標から (θ, t) 座標に移される。空間軸に相当するθ方向へは，微分方程式を解くときと同様，$\Delta\theta$ 間隔のメッシュを考えて有限個の点をとる。後に述べるように，この問題では $\Delta\theta$ の粗さは誤差に無関係である。ただし多重層の各境界は，すべてこの有限個の点のどれかに一致できる程度に細かくしておく必要がある。

Fig. 3 は，時刻 t_1 における p, uから時刻 $t_2=t_1+\Delta t$ におけるp, u を計算する手順の一部を示したものである。ここでθ軸上の任意の点をとり，それが (θ, t) 平面の上で時刻 t_1 および t_2 において占める点をMおよびM'とする。そのとき $t=t_2$でのM'における値は，$t=t_1$ でのL とRにおける値から次のように求められる。ただしL, R は，空間的にメッシュひとつだけM の前後の点（$\Delta\theta=\pm 1$）である。

いま時間間隔を $\Delta t=\Delta\theta$ にとると，LM', RM'は それぞれ前進波，後退波の特性曲線にほかならない。特性曲線に沿って成り立つ(11), (12)式は，そこで次のように書ける。

$$p_{M'}+Z_L u_{M'}=p_L+Z_L u_L \tag{14}$$

$$p_{M'}-Z_R u_{M'}=p_R-Z_R u_R \tag{15}$$

p, u の添字は Fig. 3 の点の記号に対応する。そしてここでは一般的に点Mが多重層の境界上の点で，その左と右でインピーダンス Z_LとZ_Rが別の値をとるとした。

上の連立方程式を $p_{M'}$, $u_{M'}$について解くと，

$$p_{M'}=\frac{(p_L+Z_L u_L)-(p_R-Z_R u_R)}{Z_L+Z_R} \tag{16}$$

$$u_{M'}=\frac{Z_R(p_L+Z_L u_L)+Z_L(p_R-Z_R u_R)}{Z_L+Z_R} \tag{17}$$

が得られる。上式右辺は $t=t_1$ における点L, Rにおける値であり，それから $t=t_2$ における点 M' での値が得られている。このような計算を，Δt ごとにθ軸上のすべての点について行う。

(16), (17) 式は，点Mがちょうど層の境界にあるとした時のものである。層の内部にある点では $Z_L=Z_R$であって式が簡単になる。

層の境界で上の式を使って計算すると，境界点での反射係数 $r=(Z_R-Z_L)/(Z_R+Z_L)$ から，反射波と

透過波が一定の比率にわかれて進んでいく現象などは自動的に計算される。

上の処理で，両端の点については特別の計算が必要になる。Fig.2 で $\theta=\theta_N$ の終端では，(14)，(15) 式のうち後退波に関する(15)式を，

$$p_M' = Z_{N+1}u_M \qquad (18)$$

で置き換える必要がある。これは Fig.2下の電気回路のアナロジーで言えば，終端に Z_{N+1} の大きさの負荷抵抗をつなぐことに相当する。そして Z_{N+1} と，その直前の層のインピーダンス Z_N の比が，終端における波の反射系数をきめる。弾性波伝播のシミュレーションでは，適当なところで無反射の条件を作って θ 方向の計算を打切りたいが，そのとき $Z_{N+1}=Z_N$ として(18)式の関係を用いると，無反射条件が実現される。

一方 $\theta=0$ の圧力源では，あらかじめ用意した圧力波形 $P(t)$ を入力する必要がある。ここでも電気回路のアナロジーで言って，電源の内部抵抗にあたる Z_0 を導入しなくてはならない。ケーブルの入力端に，電圧 $e(t)$ を加えるときの条件が，$E+Z_0I=e(t)$ となるように，この場合入力端では，(14)，(15) 式のうち前進波に関する(15)式を

$$p_M' + Z_0u_M = P(t) \qquad (19)$$

で置き換えたものを用いる。ここでも Z_0 の大小が反射条件をきめ，$Z_0=Z_1$ のときに無反射となる。Z_1は圧力源に接する層のインピーダンスである。

Z_0 を想定したとき，(19)式で加えた圧力 $P(t)$に対し，媒体中に生じた圧力波形 $p_0(t)$ は，

$$p_0(t)=\frac{Z_1}{Z_0+Z_1}P(t) \qquad (20)$$

の比率で小さくなることに注意を要する。筆者のシミュレーションは，入出力端ともに無反射の条件を用いたが，このとき上の係数は 1/2 となる。従って実験で爆源近くの媒体中の圧力波形を測定し，これをシミュレーションに使うときは，媒体中の波形がそれに合致するよう，圧力源に用いる $P(t)$ はその 2 倍の値を導入した。

微分方程式を差分法で解くときの誤差は，通常 Δt, $\Delta\theta$ などのメッシュの粗さに関係する。しかしこの問題では，特性曲線に沿っての(11),(12)式が，α, β のパラメーターを含まない形で解けるため，例外的にメッシュの粗さと関係なく誤差はゼロである[5)6)]。すなわちシミュレーションの結果は，(8)の微分方程式の解と完全に一致する。その際，Δt, $\Delta\theta$ によって，解はとびとびの点でしか値が得られないが，誤差は生じていない。

5. シミュレーションの実際

前節のようにすれば，圧力源に $P(t)$の圧力が加えられたときの，媒体中の振動伝播のシミュレーションが可能である。計算の途中では，新しい時刻の p, u が得られると，前の時刻の p, u は要らなくなるので，計算上のメモリーには，p, u のそれぞれに一次元配列を用意するだけでよい。

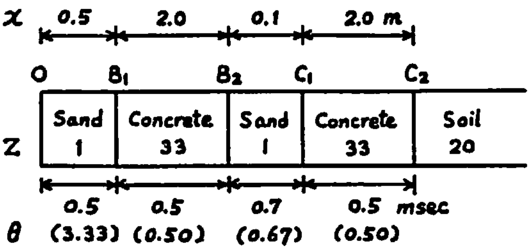

Fig.4 Conditions of the multiple layer, simulating the real experiment.

しかしシミュレーションの用途には，この後で述べるように，空間座標のある点を固定して，そこでの p, u を時間の関数として求めたい場合がある。その場合は Δt の変るごとに，与えられた点での p, u を，別に用意したメモリーに貯めこんでいくようなプログラムを作る必要がある。この報告では，もっぱらそのような形の計算結果を扱った。

シミュレーション用のコンピューターは，最初は，YHP社のミニコン MX21 を使ったが，現在はこれをマイクロコンピューターに移植している。どちらも外部記憶装置に磁気ディスクを備えており，計算結果の $p(t)$, $u(t)$ や，入力のための $P(t)$ をディスクとの間でやりとりし，またこれらのデータを別の解析プログラムにかけたり，AD 変換器を通して実測データよ結びつけたりできるようにした。プログラムの本体は，FORTRAN, BASIC のどちらの言語で書いても数十行であった。それよりも初期条件の設定や，データの入出力の部分の方が面倒である。

前報の単発発破の条件は，多重層の形として Fig.4 のようになる。Oは爆源，B_1B_2 と C_1C_2 は，2個のコンクリートの端である。これらは層の境界点である。図の上の数字は，m単位で測った各層の厚さ x で，下の数字はそれを波の速度で割った値で，msec 単位で測った各層の θ である。θ の値は実際は括弧内のように端数がつくのを，シミュレーションではその上の数字のように丸めて使った。

図で O から B_1 までの距離は，θ で測って 3.33 msec あるのを，シミュレーションでは 0.5msec に縮めて計算している。この間は入射波が形を変えないで進むので，爆源が無反射の条件になっていれば，距離に無関係である。こうすると O から C_2 までは2.2m

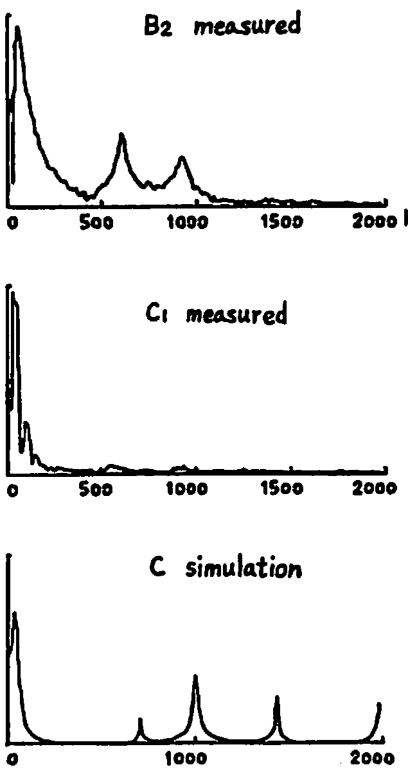

Fig. 5 Frequency spectra of measured and simulated signals.

sec となり，$\Delta\theta=\Delta t=0.1$msecの粗さで計算する時の$\theta$軸上の点の数は22個 でよい。シミュレーションではΔt刻みの計算を数千回行うことがあり，計算時間の節約のため，θ軸上の点は少いのが望ましかった。

図のまん中には，各層のインピーダンスを，砂層のそれを1としたときの相対値で示した。これらの弾性的定数は，前報に述べた数字によっている。

爆源と反対側の端 C_2 は，コンクリートと表土層の境界である。ここで前節(19)式を用いて端の点としての処理を行った。その際，計算に必要な表土層のインピーダンス（計算上は C_2 から右にあるすべての層を一つの量で代表させることになる）は，シミュレーションではいろいろな値を試みた。Fig. 4 に書き入れた数値は前報 Fig. 4 の計算に用いたもので，このとき実測値に最も近い固有振動数が得られた。

Fig. 5 で，上の二つは前報で得た単発発破のときの B_2，C_1 点での加速度波形のフーリエスペクトルである。それに対して下は，シミュレーションで得たFig. 4 の多重層の共振特性で，ここでは透過波と入射波のフーリエスペクトルの比で表わされている。両者の特性はかなりよく一致している。

下の図で 700Hz と 1kHz 附近のピークは，それぞれ砂の層（$\theta=0.7$msec）およびコンクリート層（$\theta=0.5$msec）の中を，波が往復することで生ずる共振に相当する。すなわち厚さθの層が持つ共振周波数は，

$$f=1/2\theta \tag{21}$$

を基本周波数として，その整数倍の高調波を含むものである。

それに対して，もっと低い周波数のところに，前報で扱った周期約 25msec（周波数 40Hz）の共振がある。後者はコンクリートと砂の部分を，それぞれ質量とバネとみなした機械振動系の共振にあたると考えられる。すなわち次のような近似計算ができる。

前に述べた無損失ケーブルとのアナロジーを使えば，長さの短いケーブルは，終端が開放または短絡されているとき，近似的に1個のキャパシタンスまたはインダクタンスで置き換えられる[7]。従ってある厚さの弾性体の層は，端が開放または低インピーダンスと接続されているときは質量，剛体または高インピーダンスと接続されているときはバネで近似することができよう。そのときの質量 M またはバネ定数 K は，層の厚さが x のとき，$M=\rho x$ または $K=k/x$ である。これに(19)式を用いて変形すれば，

$$\begin{aligned} M&=Zx/c=Z\theta \\ K&=Zc/x=Z/\theta \end{aligned} \tag{22}$$

である。

Fig. 4 の多重層をこのような形で眺めると，第一近似として，B_1，B_2 が一つの質量で，B_2，C_1間のバネによって C_1 から右の大きな質量につながっているという見方ができる。このとき B_1 B_2 間の質量は(22)式から $M=33\times0.5$，B_2 C_1 間のバネは $K=1/0.7$ となり，この質量とバネの直列共振周波数は，

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}\simeq47\,Hz \tag{23}$$

のように計算される（Fig. 4 のZは，砂のインピーダンスを1とした相対値であったが，(22)式の K/M もインピーダンスについては同志の比だけに関係している）。

上の計算はかなり大ざっぱなものであるが，得られた周波数は実験およびシミュレーションの結果とオーダー的に合致しており，従って多重層に見られるこの種の低周波共振は，マクロに見たときの機械振動系の共振のようなものと考えられる。

6. 結　言

前報では，発破地振動の波形を，一次元に近いモデルを使って測定した。

ここでは実験に使ったような多重層の中を，圧力波が伝播する様子をシミュレートするプログラムについ

て述べた。このプログラムは，与えられた条件の多重層に対し，与えられた波形の圧力波が入射したとき，任意の点での $p(t)$，$u(t)$ を求めるものである。そして，シミュレーションの結果は，条件によっては実測にかなり近いものが得られた。このことは，前報の実験が一次元的とみなされ，また (5) 式のような微分方程式に従い，線形的な重ね合わせができたことを意味する。

最後に多重層の共振について，簡単に考察した。

文　献

1) 田中一三：工火誌，投稿中
2) 田中一三：工火誌，42，77 (1981)
3) 川上純，田中一三：工火誌，42，70 (1981)
4) 高橋秀俊：「線形分布定数系論」，岩波書店 (1975)
5) 戸川隼人：「微分方程式の数値解法」，オーム社(1973)
6) G. D. Smith :"Numerical Solution of Partial Differential Equations", Oxford Univ. Press(1965)
7) 川上正光：「電子工学 I」，共立全書 (1953)

Reduction of Seismic Vibration of Blasting by the Technique of Multiple Shot (II)

Simulation of Vibration of Elastic Multiple Layer

by Kazumi TANAKA

A computational program, which describes the behavior of one dimensional elastic multiple layer stimulated by the pressure wave, is stated. When it was applied to the model of experiments of the former report, obtained wave form by the simulation resembled well to measured one. This fact predicted also the possibility of linear superposition of waves to explain former experiments.

(*National Chemical Laboratory for Industry, 1—1, Yatabe-cho, Tsukuba-gun, Ibaraki-ken, Japan.)