

岩石発破に関する力学的研究

第二報 岩石の圧縮性を考慮した場合

(昭和29年12月25日 受理)

村田 勉・田中 一三

(日本油脂株式会社武豊工場)

§ 8. 体積変化のある場合の方程式の変形

体積変化のある場合は(4.6)(4.7)を解くことになる。方程式を改めて書けば

$$\nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2} = 0 \quad (8.1)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\theta \quad (8.2)$$

であり、それぞれの境界条件は

$$\text{自由面にて } \theta = 0 \quad (8.3)$$

$$r=a \text{ にて } \sigma_{rr} = -p \quad (8.4)$$

である。

(8.1)と(8.3)の組合せから θ を解くことは、§5で f を見出したのと同じ考え方から

$$\theta = K' \left\{ \frac{1}{\sqrt{4W^2 - 4Wr \cos \theta + r^2}} - \frac{1}{r} \right\} \quad (8.5)$$

となる。(8.5)は $r \rightarrow 0$ で圧縮($\theta < 0$)となるように符号をとっており、 K' は正の数である。しかし(8.1)と(8.3)の組合せのみでは、例えば $r=a$ に於ける θ 値というようなものがわからない以上、 K' の値は決まらない。

(8.5)より θ が求められたので、(8.2)の右辺は既知函数となり、(8.2)を(8.4)の境界条件で解くことになる。ここで(2.18)式より

$$\sigma_{rr} = 2\mu' \epsilon_{rr} + \lambda' \theta$$

を用いて(8.4)の境界条件を f を使って表わせば、解くべき式は

$$\nabla^2 f = -\theta$$

$$r=a \text{ にて } \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{p}{2\mu'} + \frac{\lambda'}{2\mu'} \theta_a \quad (8.6)$$

となる。ここに θ_a は $r=a$ に於ける θ の値を表すものとする。

今(8.6)の解 f を

$$f = f_1 + f_2 \quad (8.7)$$

の如く二つに分け、それぞれ次の方程式、並びに境界条件を満足するように選んだとすれば、

$$\nabla^2 f_1 = 0, \quad r=a \text{ にて } \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} = \frac{p}{2\mu'} + \frac{\lambda'}{2\mu'} \theta_a \quad (8.8)$$

$$\nabla^2 f_2 = -\theta, \quad r=a \text{ にて } \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} = 0 \quad (8.9)$$

(8.7)で与えられる f は、(8.6)を満足することが、容易にたしかめられる。

先ず(8.8)の解としては、

$$f_1 = \frac{a^3}{4\mu' r} (p + \lambda' \theta_a) \quad (8.10)$$

のあることが、簡単にわかる。

一方(8.9)の方は、これを一般的に解くのは相当に困難であるから、近似的に

$$\nabla^2 f_2 = -\theta, \quad r=a \text{ にて } f_2 = 0 \quad (8.11)$$

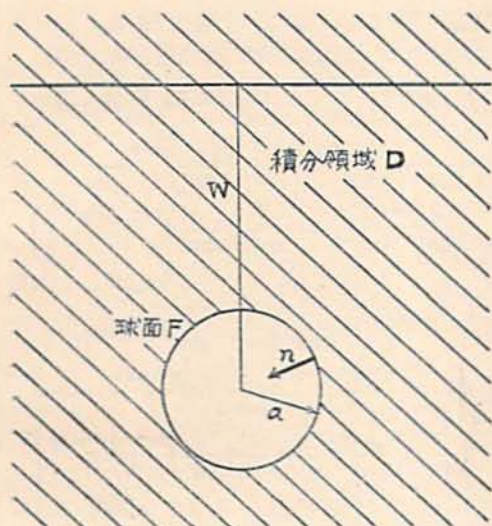
の形に置く。(8.9)の近似として(8.11)のあることは、次のような理由による。問題の性質から容易に想像される如く、 $f = \text{const.}$ なる等ポテンシャル面は、 $r=a$ 附近で原点をとり巻いて、ほぼ球面状に密集していると考えられ、その結果 $r=a$ に於ては、 $\partial^2 f / \partial r^2 = 0$ を満たす曲面も、ほぼ一つのポテンシャル面に一致しているとみなされるからである。 f に任意の数を加えても、その微分である変位や歪には、無関係となるので、(8.11)式の境界条件では、特に $f_2 = 0$ とした。

さて(8.8)(8.9)で表される f_1, f_2 の性質を考えてみると、 f_1 は主に爆源附近の f の性質を受持ち、 f_2 は全般の圧縮による性質を受持つているもので、この両者の和として f のあることがわかる。後に(8.11)より f_2 を解いてみればはつきりするのであるが、 $r=a$ の附近では、 f_2 による寄与は、(8.10)から f_1 の寄与にくらべてはるかに小さく、従つてこの附近では近似的に、 $f = f_1$ とすることが出来る。このことから、先に未知定数とした K' が、次の如くに求められる。

一般に函数 f の定義されている領域では、Greenの公式

$$\iiint_D \nabla^2 f dV = \iint_F \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_F dS \quad (8.12)$$

が成り立つ。今左辺の積分領域として、図10の如く、半径 a なる球面 F の外側全空間をとることにすれば、 F の表面で外側に立てた法線は、丁度 $-r$ の方向を向く。従つて右辺の被積分函数は $(\partial f / \partial n)_F = -\partial f / \partial r$ となつて、(8.12) 式は $\nabla^2 f = -\theta$ より



第 10 図

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{r=a} \sin \theta d\theta d\phi \quad (8.13)$$

と書くことが出来る。ここで θ に (8.5) 式を用い、 $r=a$ に於ける $\partial f / \partial r$ に $\partial f_r / \partial r$ の値を使えば、(8.13) は

$$\frac{2\pi K'}{3W} (8W^3 - 6a^2W + 2a^3) = \frac{4\pi a^3 p}{4\mu'} \left\{ 1 + K' \lambda' \left(\frac{1}{2W} - \frac{1}{a} \right) \right\}$$

より

$$K' = \frac{a^3 p}{4\mu'} \frac{2W}{2(2W-a)(W+a) + 3(\lambda'/2\mu')a^2} \quad (8.14)$$

により K' が求められる。

(8.14) 式によれば、 θ の係数である K' は、岩石特有の係数の項 $\lambda'/2\mu'$ を含んでいる。しかし後に述べるように、 $\lambda'/2\mu'$ の値は 1 より小さいと考えられるので、(8.14) 式で $a/2W$ の 2 乗以上の幂を、微小量として無視すれば、

$$K' = \frac{3a^3 p}{8\mu' W^2} \quad (8.15)$$

となる。

この K' を用いれば、(8.10) で得た f_1 は

$$f_1 = \frac{a^3 p}{4\mu' r} + \frac{a^3 \lambda' K'}{4\mu' r} \left\{ \frac{a}{\sqrt{4W^2 - 4W r \cos \theta + a^2}} - 1 \right\} \\ = \frac{3a^2 p}{4\mu' r} \left(\frac{a}{2W} \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right) + \frac{\lambda'}{2\mu'} \left(\frac{a}{r} \right) \left(\frac{a}{2W} \right) \cdot \right. \\ \left. \left\{ \frac{a}{\sqrt{4W^2 - 4W r \cos \theta + a^2}} - 1 \right\} \right] \quad (8.16)$$

と書くことが出来る。

§ 9. 体積変化のある場合の解法

筆者等は、先に体積変化のある場合に於ける発破の微分方程式より、ポテンシャル f を求めるにあたり

$$f = f_1 + f_2$$

と置いて、 f_1 を (8.16) 式の形に選べば、 f_2 は (8.11) 式即ち

$$\nabla^2 f = -\theta, \quad r=a \text{ にて } f_2 = 0 \quad (9.1)$$

の解で与えられることを知つた。

(9.1) はいわゆるポテンシャル方程式と呼ばれるもので、その解は、与えられた境界条件を満たす Green の函数を $G(r; r')$ とすれば、

$$f_2(r) = \iiint G(r; r') \theta(r') dV' \quad (9.2)$$

より求められるものである¹⁴⁾。ここに積分は、 f の定義されている空間領域、即ち半径 a なる球の外側全空間 (図10) に及ぶ。

(9.1) 式の境界条件、即ち原点を中心として $r=a$ の球面上で 0 となる Green の函数は、よく知られているように、鏡像の方法から

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^4 - 2a^2 r r' \cos \gamma + r'^2}} \right\} \quad (9.3)$$

で得られる。ここに

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

であるが、問題が軸対象であるから、 f_2 を求むべき点を $\theta=0$ なる面内にとれば、

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos \phi' \quad (9.4)$$

となる。(9.2) 式に用いられる θ は、(8.5) 式の θ を被積分座標 r', θ', ϕ' に移したものであるが、 θ も軸対象で ϕ 従つて ϕ' に無関係であり、

$$\theta = K' \left\{ \frac{1}{\sqrt{4W^2 - 4W r' \cos \theta' + r'^2}} - \frac{1}{r'} \right\} \quad (9.5)$$

と書いてよい。ここで K' に (8.15) を入れてもよい

が、計算は同じであるから簡単のために、それはあとまわしにする。

(9.3) (9.5) により (9.2) は、積分領域まで考えに入れて、次のようになる。

$$f_2 = \frac{K'}{4\pi} \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} \frac{a}{\sqrt{a^4 - 2a^2 r r' \cos \gamma + r'^2}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{4W^2 - 4W r r' \cos \theta' + r'^2}} - \frac{1}{r'} \right\} r'^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (9.6)$$

さて (9.6) 式より f_2 を計算する場合、被積分函数を次の如く冪級数に展開するのが便利である。

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^m P_m(\cos \gamma) \quad r > r'$$

$$= \frac{1}{r'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^m P_m(\cos \gamma) \quad r < r'$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^4 - 2a^2 r r' \cos \gamma + r'^2}} = \frac{a}{r r'} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m \left(\frac{r'}{r}\right)^m P_m(\cos \gamma)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4W^2 - 4W r r' \cos \theta' + r'^2}} = \frac{1}{2W} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{2W}\right)^n P_n(\cos \theta')$$

$$= \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2W}{r'}\right)^n P_n(\cos \theta') \quad 2W < r' \quad (9.7)$$

ここで r' の大小によって展開式の異なるのは、級数の収束の関係によるものである。従つて (9.6) の積分のうち r' に関する積分は、被積分函数が異なるため

$$\int_a^\infty = \int_a^r + \int_r^{2W} + \int_{2W}^\infty \quad r < 2W$$

$$\int_a^\infty = \int_a^{2W} + \int_{2W}^r + \int_r^\infty \quad r > 2W$$

の如く分けて行わなければならない。また当然 r が $2W$ より大きい小さいかによつて、積分のやり方が上の如く変わってくるので、冪級数で表わされた f_2 は、 r の大小により2つの型が出てくる。しかしこれらは結局、同じものを別の仕方でも展開したことによる差で、本質的なものでないことは言うまでもない。

(9.6) の計算手順は、一々ここに挙げるが、簡単に説明すれば、これを (9.7) で冪級数に展開してから、先ず ϕ' に関する積分を

$$\int_0^{2\pi} P_m(\cos \gamma) d\phi' = 2\pi P_m(\cos \theta) P_m(\cos \theta')$$

なる公式によつて行う。次に θ' の積分には $P_n(\cos \theta')$ $P_m(\cos \theta')$ のような項が見れるが、これも公式

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta') P_m(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{2}{2n+1} & (n=m) \end{cases}$$

によつて簡単になる。あとは r' についての冪の積分を行うだけであるが、この場合積分領域によつて、被積分函数の異なることは前に述べた通りである。

このようにして計算された f_2 は次の形になる。

$$f_2 = WK' \left[\left(\frac{r}{2W}\right) - \left(\frac{a}{2W}\right) \left(\frac{a}{r}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r}{2W}\right)^n - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+2} - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{a}{2W}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{a}{2W}\right)^{n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} \right] \quad r < 2W \quad (9.8)$$

$$f_2 = WK' \left[1 - \left(\frac{a}{2W}\right) \left(\frac{a}{r}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2W}{r}\right)^{n-1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{2W}{r}\right)^{n+1} - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{a}{2W}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{a}{2W}\right)^{n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} \right] \quad r > 2W \quad (9.9)$$

ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r}{2W}\right)^n - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+2} \right\} = -\frac{\sqrt{4W^2 - 4W r \cos \theta + r^2}}{2W} \quad r < 2W$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2W}{r}\right)^{n-1} - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{2W}{r}\right)^{n+1} \right\} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{4W^2 - 4W r \cos \theta + r^2}}{2W} + \left(\frac{r}{2W}\right) - 1 \quad r > 2W$$

なることを用いれば、 f_2 は (9.8) (9.9) 共に

$$f_2 = WK' \left[\left(\frac{r}{2W}\right) - \left(\frac{a}{2W}\right) \left(\frac{a}{r}\right) - \frac{\sqrt{4W^2 - 4W r \cos \theta + r^2}}{2W} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{a}{2W}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \frac{1}{2n+3} \left(\frac{a}{2W}\right)^{n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right\} \right] \quad (9.10)$$

となる。ここで K' の計算のときと近似を揃えて、 $a/2W$ の2乗以上の項を無視することにし、 K' には (8.15) 式を代入すれば、結局 f_2 は次式で与えられることになる。

$$f_2 = \frac{3a^2p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right) \left[\left(\frac{r}{2W} \right) - \left(\frac{a}{2W} \right) \left(\frac{a}{r} \right) + \left(\frac{a}{r} \right) - \left(\frac{a}{2W} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos\theta - \frac{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}{2W} \right] \quad (9.11)$$

一方 f_1 は (8.16) であるが、これも簡単のため冪級数に展開し、 $a/2W$ の 2 乗以上の項を無視すれば、

$$f_1 = \frac{3a^2p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right) - \frac{\lambda'}{2\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right) \left(\frac{a}{r} \right) \right] \quad (9.12)$$

となる。従つて体積変化のある場合の発破のポテンシャル f は、 $f_1 + f_2$ より

$$f = \frac{3a^2p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right) \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right) + \left(\frac{r}{2W} \right) - \left(\frac{a}{2W} \right) \left(\frac{a}{r} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) + \left(\frac{a}{r} \right) - \left(\frac{a}{2W} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos\theta - \frac{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}{2W} \right\} \quad (9.13)$$

の如くに書くことが出来る。

§ 10 体積変化のある場合の解の吟味

われわれは体積変化のある場合の発破の微分方程式より、(9.13) の如きポテンシャル f を得た。ここで § 7 でやつたのと同じく、この f についても各点の主応力方向を調べてみよう。

先ず変位及び歪は、それぞれ次の如くに計算される。即ち (4.11) 並に (4.12) から

$$u = \frac{3ap}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^2 + \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right) - 1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta \right\}$$

$$v = \frac{3ap}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right)^2 \left\{ - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin\theta + \frac{2W \sin\theta}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} \right\} \quad (10.1)$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{3p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ - \frac{2}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^3 - 2 \left(\frac{2W}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) + 2 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) + 6 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta + \frac{8W^3 \sin^2\theta}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{3p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^3 + \left(\frac{2W}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) - \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) - 3 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta - \left(\frac{2W}{r} \right) + \frac{2W}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} - \frac{8W^3 \sin^2\theta}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{3p}{4\mu^2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ 3 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin\theta + \frac{4W^2 \sin\theta (2W \cos\theta - r)}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\epsilon_{\theta\phi} = \epsilon_{r\phi} = 0 \quad (10.2)$$

そして応力 σ は、こうして得た ϵ を (2.18) に代入すれば、

$$\sigma_{rr} = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ - \frac{2}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^3 - 2 \left(\frac{2W}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) + 2 \cdot \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) + 6 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta + \frac{8W^3 \sin^2\theta}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \cdot \left(\frac{2W}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} - \frac{2W}{r} \right) \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^3 + \left(\frac{2W}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) - \left(\frac{2W}{r} \right) \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) - 3 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta - \frac{8W^3 \sin^2\theta}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} + \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) \cdot \left(\frac{2W}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} - \frac{2W}{r} \right) \right\}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2W}{r} \right)^3 + \left(\frac{2W}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right) - \left(\frac{2W}{r} \right) \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) - 3 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos\theta + \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu^2} \right) \cdot \left(\frac{2W}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} - \frac{2W}{r} \right) \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{2W} \right)^3 \left\{ 3 \left(\frac{2W}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin\theta + \frac{4W^2 \sin\theta (2W \cos\theta - r)}{(4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \sigma_{r\phi} = 0 \quad (10.3)$$

(10.3) を体積変化のない場合の応力、(7.3) とくらべてみると、(7.3) は $\{ \}$ の中に a を含まないのに反し、体積変化のある (10.3) では、この中に a や更に $\lambda'/2\mu^2$ を含んでいる。ということは、(10.3) の応力分布から主応力方向図を描いた場合に、その有様が a や $\lambda'/2\mu^2$ によつて変化することを意味している。

ここで定数 $\lambda'/2\mu^2$ について少し述べておく。 λ' 、 μ' は弾性変形に於ける Lamé の定数を、一般の場合に拡張して定義付けたものであるが、特に弾性限内では比 $\lambda'/2\mu'$ は、Poisson 比 m を用いて

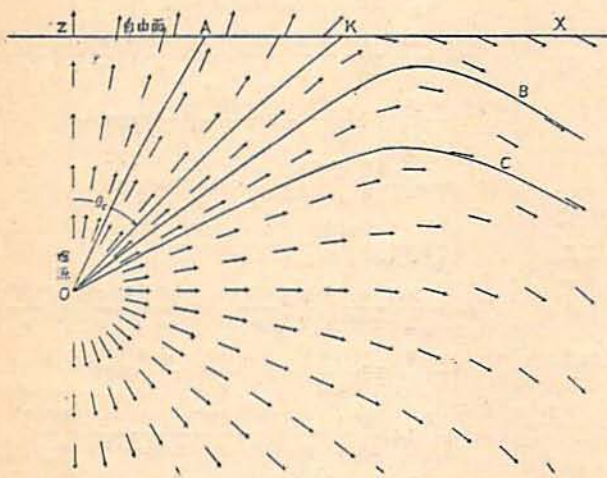
$$\frac{\lambda'}{2\mu'} = \frac{m}{1-2m} \quad (10.4)$$

と書くことが出来る。ところが Poisson 比は、必ず

しも弾性変形でなくとも定義出来るものである。従つて(10.4)を弾性限を越えた領域にも拡張して用いることにすれば、(10.4)より Poisson 比と $\lambda'/2\mu'$ の間に次の如き関係を置くことが出来る。

Poisson 比	1/3	1/4	1/5	0
$\lambda'/2\mu'$	1	1/2	1/3	0

さて(10.3)により、各点の主応力方向を計算するのであるが、式中の a はすべて a/W の項に書き直し得ることから、送り線の図形を決定するものは、 a/W 及び $\lambda'/2\mu'$ の二つであることがわかる。そこで今一例として、 $a/W=0.10, \lambda'/2\mu'=1$ をとり、(10.3)より各点の主応力方向を計算して図示すると、図11の如き結果を得る。



第11図 岩石に圧縮性ある場合の爆破主応力の方向

図11も図9の場合と同じく、矢印はその根元の点に於ける圧縮主応力の方向を示している。図11を図9とくらべて得る著しい相違は、岩石の圧縮性を考慮に入れた図11では、ある傾き以上を以て瀑源Oを出す送り線(OB, OC等)が、自由面に達することなく、再び岩石中にもぐってしまうことである。そして傾きの小さい送り線(OA)のみが、自由面に到達出来る。

このことを前に述べた、送り線が亀裂破壊の線であるという考え方と組合せてみると、OB, OC等の線は、亀裂が自由面に出ない以上、如何に強力な爆薬を用いても、実際に破壊を起す線とはみなし得ないことになる。即ち、そのような場合に、岩石を廻り起してみれば、ある点までは亀裂が入っているかも知れないが、われわれの考え方に時間の概念が入っていないため、亀裂がある点まで走つて停るといふような考え方をとつてよいがということにも疑問がある。どちらにしてもとに角、この種の送り線は有効な亀裂破壊の線

とはなり得ないわけである。一方自由面に達するような送り線では、このような制限はないので、OAの如き送り線は亀裂破壊の線となり得る。

われわれは図11で、自由面に達し得る送り線のうち、最大の傾き θ_0 を以て瀑源を出るものをOKとした。換言すれば、岩石の圧縮性を考慮すれば、漏斗孔の壁となる亀裂線は、OKより外側に拡がり得ないという結論を得るのである。これが岩石を非圧縮性とした7の結果を、大きく修正することになる。これは爆薬のエネルギーが如何に強大であつても(過装薬の場合) a が大きくならない限り漏斗孔の形状は送り線OKで決定されるものよりも大きくはなり得ないということ、この意味でK点の位置が、発破に於て占める価値は重大なものである。漏斗孔を含む断面が図11のOAXの如くである場合、われわれはA点を淵点(edge point)と呼び、特にK点のことを臨界淵点(critical edge point)と呼ぶことにしよう。

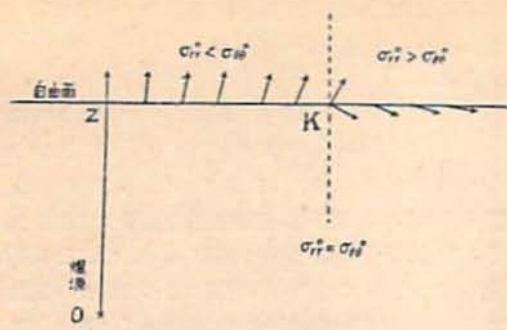
次に臨界淵点Kの位置を決定する。先ず(10.3)式より、自由面に於ける σ_{rr} と $\sigma_{\theta\theta}$ を計算してみると、自由面の条件 $r \cos \theta = W$ を代入して、それぞれ次式を得る(自由面に於ける値には、右肩に 0 を附す)

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{W}\right)^3 \cos^3 \theta \left\{ -\frac{2}{3} - 2 \left(\frac{a}{2W}\right) + 2 \left(\frac{a}{2W}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu'}\right) + 12 \left(\frac{a}{2W}\right)^3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{3p}{2} \left(\frac{a}{W}\right)^3 \cos^3 \theta \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{a}{2W}\right) - \left(\frac{a}{2W}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu'}\right) - 6 \left(\frac{a}{2W}\right)^3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right\} \quad (10.4)$$

これらは、 a や p が一定ならば θ のみの函数となることはいうまでもない。(10.4)式で θ をいろいろ変化させてみると、 θ が小さいうちは $\sigma_{rr}^0 < \sigma_{\theta\theta}^0$ で、 r 方向に圧縮、 θ 方向に引張りのあることがわかる。しかし θ が大きくなると $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0$ なる点があり、更に θ を増せば逆に $\sigma_{rr}^0 > \sigma_{\theta\theta}^0$ となつてしまう。 $\sigma_{rr}^0 > \sigma_{\theta\theta}^0$ ということは、圧縮が r 方向よりも、むしろそれと直角な θ 方向に近いということであり、 $\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0$ の成立つ点で、丁度 r と θ 方向の間に圧縮(及び引張り)の主方向がくる。このことを図示すると図12の如くである。従つて点Kの位置を決定する条件は明かとなり、それは

$$\sigma_{rr}^0 = \sigma_{\theta\theta}^0 \quad (10.5)$$



第12図 漏斗孔の臨界淵点を定める性質

である。

(10.4) より (10.5) を計算してみると

$$1 + 3\left(\frac{a}{2W}\right) - 3\left(\frac{a}{2W}\right)^2 \left(1 + \frac{\lambda'}{2\mu'}\right) \\ = 18\left(\frac{a}{2W}\right)^3 \cos^2\theta + 2\sin^2\theta$$

より、

$$\theta_0 = \sin^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1 + 3(a/2W) - 3(a/2W)^2(1 + \lambda'/2\mu') - 18(a/2W)^3}{2 - 18(a/2W)^3}}$$

$$(10.5)$$

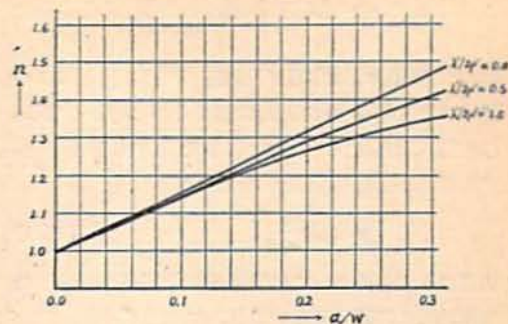
で与えられる θ_0 が、K 点の座標を決定する。(10.5) より明らかな如く、 θ_0 は $a/2W$ (又は a/W) 及び $\lambda'/2\mu'$ (又は Poisson 比 m) によって変化するもので、そのうち特に a/W の比が、 θ_0 を決定する大きな因子となる。また θ_0 はほぼ漏斗孔の半頂角に等しく、漏斗指数を n とすると $n = \tan\theta_0$ とも書ける。従つて (10.5) 式を n の式に書き直すと

$$n = \sqrt{\frac{1 + 3(a/2W) - 3(a/2W)^2(1 + \lambda'/2\mu') - 18(a/2W)^3}{1 - 3(a/2W) + 3(a/2W)^2(1 + \lambda'/2\mu')}} \\ (10.6)$$

となる。

今二、三の $\lambda'/2\mu'$ につき、漏斗指数 n の a/W による変化の有様を計算してみると図13の如き曲線を得る。図13は a/W の増加に伴い、 n が大きくなることを示しているものである。

通常の発破では、 a/W は 0.2~0.3 程度であるから n は 1.3~1.4 となる。これが西村氏⁹⁾等の理論では 0.8 となつている。また安藤氏の説によれば漏斗孔の頂角は 110° 即ち $n=1.43$ が実験上良いとしている。それには理論的根拠は全然ないが、豊富な経験からの結論である。筆者等の全く独立の本理論が漏斗孔の角度に関しては氏の結論に近くなつたことは、甚だ興味があることと言わなければならない。

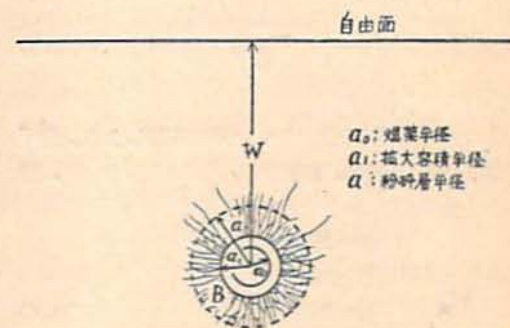


第13図 a/W に対する漏斗指数 n の値

§ 11 爆薬の動的効果並びに例題

われわれは前節に於て、岩石の圧縮性を考慮したときの各点の応力が (10.3) で与えられること、及び最大漏斗孔の漏斗指数 n は (10.6) 式から計算されることを導き出した。所でこれらの式を実験発破に適用するに当つては、最初われわれが、問題を § 4 で純静的に取扱つたことを思い出す必要がある。即ち以上われわれの議論して来た式中のパラメーター a, p 等は、あくまで問題を静的に置き換えた場合のそれであつて、これが爆薬半径、爆轟圧力との間にどのような関係を持つべきかは、軽々しく論じられない。それは爆薬の動的効果 (猛度) と結び付いたものだからである。しかしわれわれはそれを次のように考えてみたい。

図14は爆薬を理想的に、半径 a_0 の球とみなしたときの爆薬近辺の破壊状況を、いくぶん模式的に表したものである。先づ爆薬の爆轟によつて、爆薬に隣接する部分には、半径 a_1 の拡大領域があり、次いでおびただしい亀裂の入る領域 B (半径 a) がある。われわれはこの a を、前節まで論じて来た式の中に用いようと思う。その理由は次の如くである。領域 B の内



第14図 爆源附近の粉碎層

部にはおびただしい割れ目があるため、後に作用してくる静圧は、そのすき間を疑つてあたかも半径 a の

球面に作用するかの如き、結果になると考えられるからである。

従つて球面 a に作用する静圧 p は、動圧によつて拡大された半径 a_1 の球面に働くそれと等しくなる。そこで装薬孔が拡大されないとしたときの静圧を p_0 とすれば、 p は比熱比を γ として

$$p = p_0 \left(\frac{a_0}{a_1} \right)^{3\gamma} \quad (11.1)$$

で表されるであろう。これは装薬の半径が a_0 から a_1 まで漸次的に膨脹するという見方にもとづく。

われわれは次に、 a_1 及び a を求めなくてはならないが、ここで先に得た (10.1) (10.2) 式を採用しよう。これらの式は半径 a の球面内側に、圧力 p が作用したときの変位及び歪を表すものである。装薬孔の拡大やその周辺の破砕は、爆薬の静圧ではなく動圧(猛度)によることは明らかであるが、猛度も圧力の次元を持つた量であるから、(10.1) (10.2) は動圧に関しても成立すると考えられる。すると $a_1 - a_0$ は、半径 a_0 なる球面内側に、動圧 p_d が作用したときの、 $r = a_0$ 点の変位に等しく、(10.1) より

$$a_1 - a_0 = (u)_{r=a_0} = \frac{a_0 p_d}{4\mu'} \quad (11.2)$$

で計算されることになる。ここで p_d は動圧を意味し、式の第二項以下は微小量として無視したものである。

次に破砕領域の半径 a を求めよう。一般に破壊は物質の歪みがある臨界値に達することによつて、生ずるものと考えられる。今爆源附近の ϵ_{rr} を計算してみると (10.2) 式より

$$\epsilon_{rr} = -\frac{p_d}{2\mu'} \left(\frac{a_0}{r} \right)^3$$

となる。ここでも式の第二項以下は無視した。この ϵ_{rr} がある値 ϵ_c 以上のところで、破壊が起るとすればその半径 a は

$$a = \sqrt[3]{\frac{p_d}{2\mu'\epsilon_c}} a_0 \quad (11.3)$$

で与えられる。

(11.2) (11.3) を使いやすい形に変形しよう。先ず動圧(猛度) p_d は、爆速を D 、ガス流速を W 、爆薬の装薬密度を Δ とするとき

$$p_d = \Delta D W$$

で表されるが、これはまた

$$p_d \propto \Delta D^2 \quad (11.4)$$

とも書ける。(11.4) を用うれば (11.2) (11.3) はそれぞれ

$$a_1 = (1 + c_1 \Delta D^2) a_0 \quad (11.5)$$

$$a = c_2 \Delta^{1/3} D^{2/3} a_0 \quad (11.6)$$

となり、更に装薬量を L 、装薬密度を Δ とすれば

$$a_0^3 = 3L/4\pi\Delta$$

であるから、

$$a_1 = 0.61(1 + c_1 \Delta D^2) L^{1/3} \Delta^{-1/3} \quad (11.7)$$

$$a = c_2 L^{1/3} D^{2/3} \quad (11.8)$$

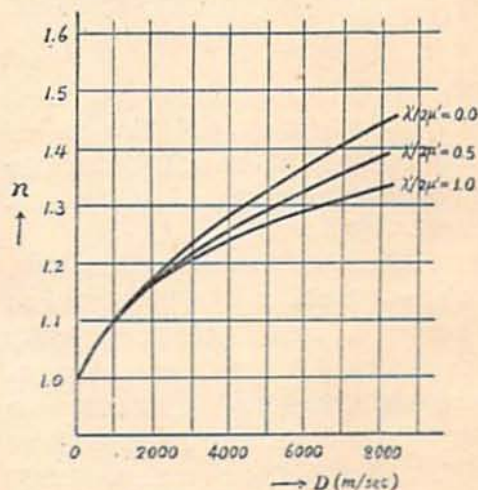
としてもよい。われわれはこの (11.7) 及び (11.8) 式をもとにして、以下二、三の例題を取扱つてみよう。

(11.7) 及び (11.8) 式中の定数 c_1 、 c_2 は、その性質として μ' 、 ϵ_c を含むから岩石によつて決まる係数である。式の右辺はその他すべて既知量ばかりで、実験から a_1 及び a を実測すれば、 c_1 、 c_2 は求めることが出来る。われわれは新綱ダイナマイトによる実験で、中等硬度の岩石に対しては、それぞれ $c_1 = 5.9 \times 10^{-13}$ 、 $c_2 = 2.8 \times 10^{-4}$ (c.g.s. 単位) なる数値を得ているので、これにもとづいて計算を進める。

先ず最初に、爆薬があらかじめ過装薬に近い状態で使用される場合を考えよう。実際鉱山では、このような使用法がよく行われている。このときには漏斗孔の大きさは、 $\frac{1}{2}$ 10 で述べた如く臨界淵点 K の位置で定つてしまう。今例りに $L = 500g$ 、 $W = 70cm$ の一定値をとり、爆速 D のいろいろな値について (11.8) 式から a を求め、これを (10.6) に入れて漏斗指数 n に換算してみると、図15の如き結果を得る。図は爆速の高いものほど、大きな漏斗孔になり得ることを示して居り、また掘り起される岩石の体積 V は、近似的に

$$V = \pi W^2 \left\{ \frac{W}{3} + 2.8 \times 10^{-4} L^{1/3} D^{2/3} \right\}$$

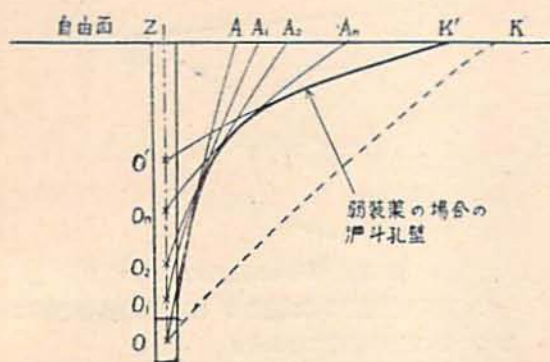
より算出されることも、容易にたしかめられるであろう。



第15図 爆速と漏斗指数の関係

う。

次に弱装薬の場合であるが、これは問題がかなり複雑になってくる。というのは弱装薬の発破でも、最初岩石に穿孔をほどしたボアホール (bore-hole) だけは抜けてしまうからである。図16の如く岩石に穿孔した場合を考えよう。



第16図 弱装薬の場合の漏斗孔形状

このときの臨界淵点を K とする。爆薬が充分のエネルギーを持って居れば漏斗孔の形状は図の OK となることは、何度も繰返した通りである。しかし爆薬のエネルギーが不十分で、 OK の迂り線は破壊条件が満たされず、仮に OA の如き迂り線がようやく亀裂破壊を起し得たとする。このときには、漏斗孔の淵点は A ということになりそうであるが、実際にはボアホールの所が抜けるため OZ に沿って圧力の作用点が上昇してくる。これは爆源が移動することと同じく、迂り線の配置をも変化させ、当然亀裂破壊を起す迂り線も、圧力作用点の移動とともに $O_1A_1, O_2A_2 \dots$ と変化する。そして圧力作用点が O' に来たとき、ここから見た臨界淵点 K' を通る迂り線が始めて破壊を起し得るようになったとすれば、このときの漏斗孔の形は図16の太線のようになるであろう。最小抵抗線が短くなれば、淵点の拡がり e_0 も大きくなるので、弱装薬の発破は見かけの漏斗指数が大きくなるものである。

このように考えると、弱装薬の発破ではどのような迂り線が亀裂を起し得るかという条件を知ることが、先ず必要になってくる。これは各点の応力が、(10.3) で与えられている以上、破壊条件式は一般に

$$F(\sigma) > K$$

なる σ の同次式によって与えられるものであるから、定性的には (10.3) 式の各 σ にかかる因子 $p(a/W)^3$ を比較してもよい。即ちこの因子の大きいものほど、亀裂破壊の条件をよく満たすことになる。従つて弱装薬の場合には、漏斗孔の形状を厳密に定めることは困

難としても、 $p(a/W)^3$ を比較することによつて、異つた性質の爆薬のどちらが大きな漏斗孔になるかという、判断は出来ることになる。次にそれを計算してみよう。

この場合には p の計算が必要になる。先ず P_0 は、Abel-Noble 式より

$$P_0 = \frac{fL}{L/\Delta - \alpha L} \quad (11.9)$$

で与えられる。ここに f は火薬力、 α は ρ ボリウムであるが、 ρ ボリウムは Roth によれば

$$\alpha = \frac{1.5}{1.26 + 1.33\Delta_1}$$

であり、上式中の爆薬密度 Δ_1 を、装填密度 Δ とほぼ等しいとみれば、(11.9) 式は

$$p = \frac{1.26 + 1.33\Delta}{1.26 - 0.17\Delta} \Delta f$$

となる。これを (11.1) に代入し (11.5) を使えば

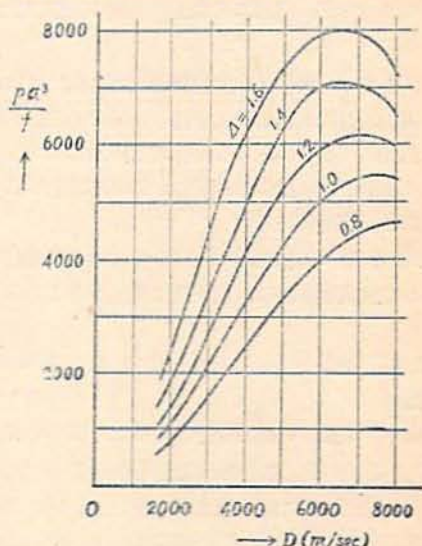
$$P = \frac{\Delta f}{(1 + c_1 \Delta D^2)^{3\gamma}} \frac{(1.26 + 1.33\Delta)}{(1.26 - 0.17\Delta)} \quad (11.10)$$

で p が求められる。

従つて破壊の条件を決める因子 $p(a/W)^3$ は、次の形となる。

$$P \left(\frac{a}{W} \right)^3 = \frac{c_2^3 L \Delta D^2 f}{W^3 (1 + c_1 \Delta D^2)^{3\gamma}} \frac{(1.26 + 1.33\Delta)}{(1.26 - 0.17\Delta)} \quad (11.11)$$

ここでも前と同じく、 $L=500g, W=70cm$ の場合につき、 $\gamma=1.25$ として (11.11) の f にかかる係数の部分を計算してみると (c_1, c_2 は中等硬度の岩石に対する値を用いる)、図17の如き結果を得る。図17では、爆速 D がある程度より大きくなると、破壊条件



第17図 爆速と爆破効果比較値

の因子が反つて小さくなるが、これは装薬孔の拡大半径が、猛度によつて決まるとしたため、猛度の大きな爆薬では、 p/p_0 の減少が利いてくるからである。拡大半径が単に猛度のみによつて決まるものかどうかについては、尙議論の余地が残されて居り、詳しい考察は後の機会に譲りたい。

上來述べ来たつたところにより、爆薬の爆破効果は、その装填密度 Δ 、薬量 L 、火薬力 f 、爆速 D の四要素によつて定ることがわかる。また岩石の爆破効果に関係ある特性としては、拡張された Lamé の定数 λ' 、 μ' 及び臨界破壊歪 ϵ_c である。

§ 12. 結 論

以上筆者等は自由面発破(心抜発破)の場合に関し、厳密な力学的理論を展開したのであるが、その要旨をまとめると次の如くなる。

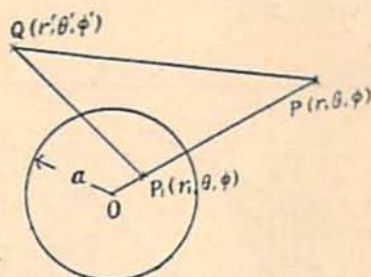
1. 先ず等方性岩石内の応力、歪み、変位の関係から発破の微分方程式を導いた。
2. 次に此の方程式を普通の體性力学で取扱う如く岩石に圧縮性がないものとして爆源及び自由面に於ける境界条件を満足する解を得た。此の場合は漏斗孔壁の自由面となす角は常に 45° となる。
3. 更に岩石に圧縮性がある場合に就き Green の函数を適用して、適当な境界条件に対し発破の方程式を解いた。その解によれば、経済的発破は漏斗指数 $n=1.2\sim 1.4$ となる如く行うことが推奨される。即ち漏斗孔頂角は $100\sim 110^\circ$ になる如く発破すべきである。此の最適角度は岩石と爆薬の種類によつて異なるが、何れにせよ上記角度の範囲に大体収まる。
4. 装薬室の拡大半径並に粉碎層半径に就いては、更に実験的並に理論的研究を行う余地がある。
5. 弱装薬の場合の漏斗孔形状の計算法は難かしい問題であるが、破壊条件式がわかれば本理論により解くことが可能である。
6. 式の誘導には相当長い過程を要するが本報告には努めて数式を省略し、説明的に記述することとした。

[註A] 半径 a なる球面上で 0 となる Green の函数。

今図 A の如く、原点を中心とした半径 a の球面 F があるとす。与えられた球外的一点 $P(r, \theta, \phi)$ に対し、球面 F に鏡像点 P_1 をとる。 P_1 の座標は、角成分については P と同じで、 r 成分だけが異なるので、これを (r_1, θ, ϕ) とする。

われわれの場合、積分の定義されている領域は球の外側であるから、球外の任意の点 $Q(r', \theta', \phi')$ について次の Green 函数を考える。

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{PQ} - \frac{a}{r} \frac{1}{P_1Q} \right) \quad (A_1)$$



第18図 Green 函数の求め方

(A₁) 式で定義された函数 G は、次の条件を満たしていることが容易にわかる。

- (1) $P \neq Q$ のとき G は二階微分係数まで連続で、且つ $\nabla^2 G = 0$
- (2) $P \rightarrow Q$ とすると $G = 1/4\pi r PQ$
- (3) P が球面 F 上にあれば $G = 0$

上の (1) (2) は G が Green の函数であるための条件で、また (3) はわれわれの必要とした境界条件である。従つて (A₁) 式より導かれる G こそ、われわれの求めるものである。

(A₁) 式の \overline{PQ} 及び $\overline{P_1Q}$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2} \\ \overline{P_1Q} &= \sqrt{r_1^2 - 2r_1r' \cos \gamma + r'^2} \end{aligned} \quad (A_2)$$

と書くことが出来る。ここに

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

である。

P, P_1 が鏡像の位置にあることより、 $rr_1 = a^2$ を得る。これと (A₂) の関係から (A₁) を表せば結局

$$G(r, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^4 - 2a^2 r r' \cos \gamma + r'^2}} \right\} \quad (A_3)$$

となる。

[註B] Legendre 函数を含む冪級数の総和法
先ず

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta) \right\}$$

なることを利用して、与式を次の形に変形する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r}{2W} \right)^n - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{r}{2W} \right)^{n+2} \right\} P_n(\cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+1} \left\{ P_{n+1}(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta) \right\} \\
 &- 1 + \left(\frac{a}{2W}\right) \cos\theta \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta}{n(n+1)} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+1} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) - 1 + \\
 &\left(\frac{r}{2W}\right) \cos\theta \\
 &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right\} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \\
 &\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right\} - 1 + \left(\frac{r}{2W}\right) \cos\theta
 \end{aligned} \tag{B_1}$$

ここで右辺の { } の中は、公式

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{y}\right)^n P_n(\cos\theta) &= - \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^n P_n(\cos\theta) dy \\
 &= - \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}} - \frac{1}{y} \right\} dy \\
 &= - \log \left\{ \frac{-x\cos\theta + y + \sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}}{2y} \right\} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^n P_n(\cos\theta) dx \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}} - \frac{1}{y} \right\} dx
 \end{aligned}$$

$$= \log \left\{ \frac{x - y\cos\theta + \sqrt{x^2 - 2xy\cos\theta + y^2}}{y(1 - \cos\theta)} \right\} - \frac{x}{y}$$

を用いて総和が出来る。そして

$$\begin{aligned}
 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \log \left\{ \frac{2W - r\cos\theta + \sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}{4W} \right\} \\
 = \cos\theta + \frac{r - 2W\cos\theta}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}} \\
 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \log \left\{ \frac{r - 2W\cos\theta + \sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}{2W(1 - \cos\theta)} \right\} \\
 = -1 + \frac{2W - r\cos\theta}{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}
 \end{aligned}$$

なることより、結局 (B₁) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r}{2W}\right)^n - \frac{1}{2n+3} \left(\frac{r}{2W}\right)^{n+2} \right\} P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{4W^2 - 4Wr\cos\theta + r^2}}{2W} \tag{B_2}$$

の如くに計算される。この場合 (B₁) 右辺の第一項は (r/2W) の1乗を微分の外へ出しておくことが必要である。

文 献

- 14) 例えば犬井鉄郎：応用偏微分方程式論（岩波）1951 参照
- 15) 安藤源次：発破工学第7集 34（1952）