

研究論文

打上げ煙火玉に働く Magnus 力に関する研究

丁 大玉[†], 吉田忠雄

足利工業大学工学部機械工学科 〒326-8558 栃木県足利市大前町268-1

[†]Corresponding address: dding@ashitech.ac.jp

2008年1月7日 受付 2008年1月16日 受理

要旨

本研究は打上げ煙火玉の運動を高速度ビデオカメラで撮影し、煙火玉の回転の有無と回転軸の方向を確認した。実験結果によって、煙火玉の回転・無回転および回転軸の方向が種々の影響因子によるランダム現象であることがわかった。また、空気の粘性による煙火玉の回転速度の減衰を実験により調べた。これらの実験結果に基づいて、Magnus力および煙火玉の回転減衰方程式を取り入れた3次元モデルを数値的に計算し、Magnus力が煙火玉の運動にどの程度の影響を与えているかを検討した。

1. 緒言

鉛直に打ち上げられた無回転煙火玉は、横向きの力に作用されない限り、垂直に上昇する。上空で開発しなければ(黒玉の場合)、また垂直に落下して発射点(打上げ筒のところに)戻る。しかし、風などの影響で水平方向へシフトし、最終的に発射点から離れたところに落下することがある。したがって、打上げ煙火の保安距離を設定する際に、煙火玉に働く水平方向の力による影響を考慮しなければならない。著者ら¹⁾は初めて煙火玉の3次元運動軌跡を計測し、空気抵抗と風の影響を取り入れた煙火玉の3次元弾道モデルから煙火玉の弾道を予測し、実測データとの比較を行った。

打上筒から発射された煙火玉は飛しょう中、重力と空気の浮力および空気抵抗力を受けている。また、飛行機の翼のような非球対称性の形状の物体は、回転しなくても飛しょう方向に対して横向きに揚力が生じることがあり、物体が横向きへの移動を伴って進行する可能性がある。飛しょう方向に対して対称な球は、気流の乱れや気流の速度勾配がなければ、このような揚力は生じない。しかし、飛しょう方向と一定の角度となる軸を中心に回転している球が空気中を進行すると、球が回転することによって、球の表面付近の空気も球といっしょに回転する。流れと同方向に回る球の表面付近の境界層では流れが速く、その反対側の境界層では流れが遅いため、両側の境界層で流れの速度差が生じることになり、ベルヌーイの定理により圧力差が生じる。このような圧力差により回転の球に働く力をMagnus力という。Magnus力は物体の運動方向(速度ベクトル)と物体の回転軸(角速度ベクトル)の両方に直角な方向に物体に作用する。ただし、回転軸の向きが運動方向と一致した場合のMagnus力はゼロであり、回転軸の向きが

運動方向に垂直になるとき、Magnus力は最大となる。野球などのボールに回転をかけながら投げると曲がるのは、横向きのMagnus力によって生じる現象である。この現象をMagnus効果という。

日本の煙火玉はほとんど球状のものであるが、R. L. Schneider²⁾は推理によって、球状のボールが回転すれば、ボールにMagnus力が働くが、打ち上げられた煙火玉が回転しても、回転軸の向きは進行方向と一致するので、Magnus力は生じないという結論を得た。彼は、打上げ煙火玉が回転することと回転しても回転軸の向きが進行方向と一致しないことを否定した。

一方、D. Eckhardtら³⁾はMagnus力の作用による煙火玉の水平移動距離を計算した。彼の計算結果は、5 rpsの回転速度で回転している8号煙火玉はその水平移動距離が85 m以上に達し、Magnus力の影響が大きいという計算結果を得た。

著者らは打上げ煙火玉の運動軌跡を高速度ビデオカメラで撮影し、回転するかどうかを検証した。また、回転している煙火玉の回転軸の向きや空気の粘性による回転速度の減衰を実験により調べた。さらに、著者らが作成した従来の煙火玉の3次元弾道モデル¹⁾にMagnus力および空気の粘性による煙火玉の回転減衰方程式を取り入れ、打上げ煙火玉の弾道を数値的に計算し、Magnus力が煙火玉の運動にどの程度の影響を与えているかを検討した。ここでは、これらの研究結果をまとめて報告する。

2. 実験

本研究では、高速度ビデオカメラを用いて、打上げ煙火玉の空中運動軌跡を撮影した。実験場所の制限のため、10 g以下の揚薬量を用いて、3号煙火玉のみを打ち上げた。

煙火玉の後部に朴と呼ばれる発光体を取り付けた。実験方法、計測原理および実験結果の一部については、著者らの過去の研究論文¹⁾に記述されているので、ここでは、過去の実験データ¹⁾をそのまま引用し、詳細の記述を省略する。

3. 筒外弾道の理論計算

3.1 飛しょう中の煙火玉の運動方程式

空中を運動する煙火玉に作用する外力として、重力、空気の浮力、空気の抵抗力およびMagnus力を考える。ここでは、煙火玉を球対称とする。また、気流の乱れや気流の速度勾配に起因する力を無視する。

空気の抵抗力は煙火玉の回転の影響をほとんど受けないとして、次のように表す。

$$\vec{F}_D = -\frac{\rho A C_D}{2} \cdot |\vec{u}_r| \cdot \vec{u}_r \quad (1)$$

ここで、 A は玉の投影面積、 ρ は空気の密度、 $\vec{u}_r$ は玉と空気との相対運動速度ベクトルである。 C_D は抵抗係数でレイノルズ数(Reynolds number) $Re = u_r d_p / \nu$ により定義された無次元数の関数である。 d_p は玉の直径、 ν は動粘性係数である。20℃、標準大気圧における空気の動粘性係数は $1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ である。ここでは、著者らの過去の研究¹⁾で得られた3号煙火玉の $C_D = 0.4 \sim 0.5$ を利用した。

煙火玉が空気に対する相対速度 $\vec{u}_r$ で進行すると同時に角速度 $\vec{\omega}$ で回転するときのMagnus力をFig.1に示す。Magnus力⁴⁾を次式により表示することができる。

$$\vec{F}_L = -\frac{C_L \rho \pi d_p^3}{16} \vec{u}_r \times \vec{\omega} \quad (2)$$

ここで、 ρ は空気の密度、 $\vec{\omega}$ は回転角速度ベクトルである。無次元数 C_L をMagnus係数という。Yamamoto⁴⁾は $C_L = 1.6 \sim 2.0$ の実験値を得ている。本研究の計算では、その平均値を利用した。

鉛直方向を z 軸とした3次元直交座標において、単位ベクトルの x , y , z の成分をそれぞれ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ で表すと、玉の位置 $\vec{r}$, 風(空気流動)の速度 $\vec{w}$, 相対運動速度 $\vec{u}_r$ および角速度 $\vec{\omega}$ はそれぞれ

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (3)$$

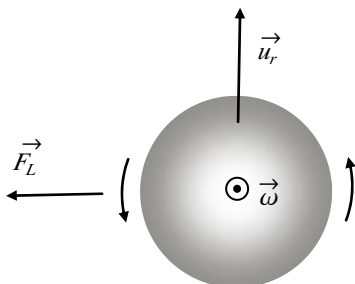


Fig. 1 Magnus force $\vec{F}_L$ acting upon a launched rotating spherical aerial shell.

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k} \quad (4)$$

$$\vec{u}_r = \vec{u} - \vec{w} = (u_x - w_x)\vec{i} + (u_y - w_y)\vec{j} + (u_z - w_z)\vec{k} \quad (5)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (6)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x - w_x & u_y - w_y & u_z - w_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

である。式(6)中の角加速度の各成分を次のように表示することができる。

$$\omega_x = |\vec{\omega}| \cos \alpha \sin \beta \quad (8)$$

$$\omega_y = |\vec{\omega}| \sin \alpha \sin \beta \quad (9)$$

$$\omega_z = |\vec{\omega}| \cos \beta \quad (10)$$

ここで、 β は回転角速度ベクトルと z 軸との角度、 α は $x-y$ 平面における回転角速度ベクトルの投影と x 軸との角度である。

重力ベクトルと浮力ベクトルはそれぞれ $\vec{F}_g = m\vec{g}$ と $\vec{F}_B = -(\rho / \rho_p) m\vec{g}$ である。 $\vec{g}$ は重力加速度ベクトルである。3次元直交座標において、重力加速度は $\vec{g} = -g\vec{k}$ (鉛直下向き)で表される。 ρ_p は玉の密度である。したがって、空気中を運動する煙火玉の運動方程式は

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_B + \vec{F}_D + \vec{F}_L \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \quad (12)$$

となる。

さらに、空気の粘性が回転煙火玉に作用するトルクを T とおけば、煙火玉の回転速度は

$$I \frac{d\omega}{dt} = -T \quad (13)$$

にしたがって変化する。ここで、 I は球状煙火玉の慣性モーメントであり、次式で表す。

$$I = \frac{8}{15} \pi \rho_p \left(\frac{d_p}{2} \right)^5 \quad (14)$$

空気の粘性が回転煙火玉に作用するトルクは、Dennisら⁵⁾の式

$$T = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{d_p}{2} \right)^5 C_T \omega^2 \quad (15)$$

を用いた。式中の無次元数 C_T は流体トルク係数であり、本研究では C_T の値を実験により求めた。

3.2 運動方程式の数値計算

各時刻における煙火玉の座標と速度については、4次のルンゲ・クッタ法を用いて式(11)～(13)の運動方程式を数値的に求めた。本研究では、Microsoft Excel表計算プログラムを作成し数値計算を行った。

4. 結果と考察

4.1 打上げ煙火玉の回転

打上げ実験¹⁾では、朴という発光体の付いた3号煙火玉を用いたため、夜の空中を運動する煙火玉の軌跡を高速ビデオカメラで追跡することができた。高速ビデオカメラの映像から取り出した一部静止写真をFig.2に示す。これらの写真により、Shell 1～Shell 3の煙火玉はいずれも回転しているが、各煙火玉の回転速度および回転軸の方向はそれぞれ異なることがわかる。回転軸の方向を正確に確認することは困難であるが、各煙火玉の回転軸の方向はそれぞれ異なることから、回転軸の方向が煙火玉の進行方向と必ずしも一致しないことがあると推測できる。煙火玉(Shell 4)のほうはほとんど回転していないように見える。また、煙火玉(Shell 3)のほうは、頂上を通過した後爆発をしたため、頂上に達した瞬間までの様子をカメラでとらえた。比較のため、煙火玉の上昇中の様子および頂上に達したときの様子をそれぞれFig.3(a)とFig.3(b)に示す。煙火玉が上昇するとき、発光体の軌跡は螺旋状となるが、頂上に達したとき、煙火玉の進行速度がゼロとなり、カメラの角度から見た発光体の軌跡はほぼ円形である。煙火玉は鉛直方向から大きくずれた回転軸を回転しているのではないかと推測する。打上げ煙火玉の空中運動については、高速ビデオカメラの映像を解析した結果から、以下のような特徴があることがわかる。

打ち上げられた煙火玉の回転・無回転は種々の影響因子によるランダム現象である。煙火玉は回転しながら進行し、回転角速度の方向は進行方向と必ずしも一致しないことがある。式(2)によれば、Magnus力 $\vec{F}_L$ の方向は、相対速度ベクトルと角速度ベクトルの外積 $(-\vec{u}_r \times \vec{\omega})$ の方向と一致する。Magnus力 $\vec{F}_L$ の大きさは $|\vec{u}_r| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin\gamma$ に比例する。 γ は回転軸と進行方向の間に挟まれた角度(以下、回転角度と略す)である。回転角度が小さいほど、煙火玉に働くMagnus力は小さくなるが、回転角度がゼロでない限り、 $|\vec{u}_r| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \sin\gamma$ はゼロにならないため、Magnus力は進行中の回転煙火玉に必ず働く。

打ち上げられた煙火玉がどのような回転角度で回転しながら進行するかは、それぞれの打上げ条件(揚薬量、打上げ筒の長さ、打上げ筒と煙火玉の間にあるクリアランス、煙火玉の表面状況等)や他の要因によるものであり、一定ではない。特に、煙火玉の形状や表面状況は回転軸の向きに大きな影響を与える。煙火玉に取り付けられている竜頭紐や導火線(おやみち)により、煙火玉は進行方向とより小さい角度となる軸を中心に回転する傾向があるが、回転軸の向きは垂直から水平までの間のいずれかの角度になる。

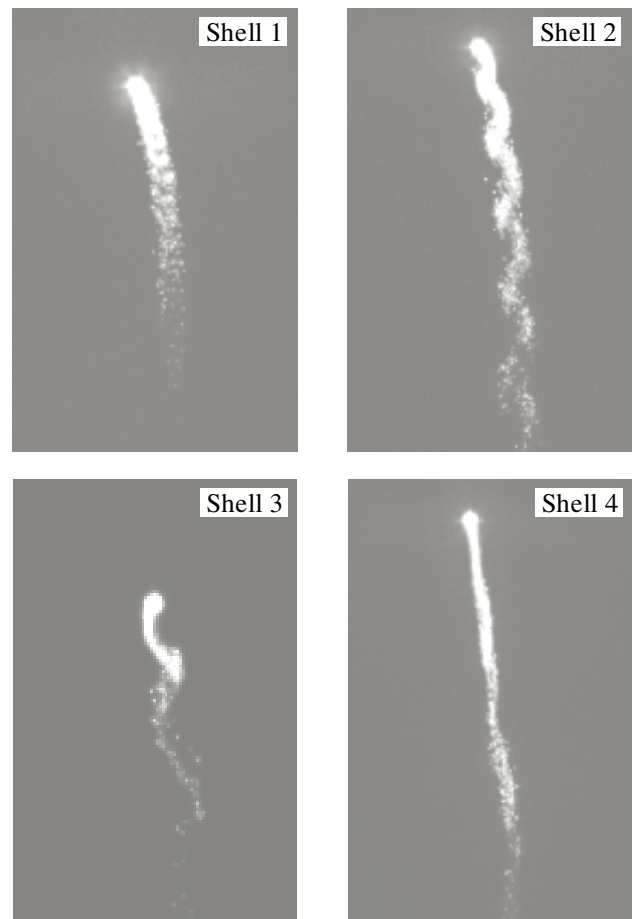


Fig. 2 Trajectories of launched rotating spherical aerial shells.

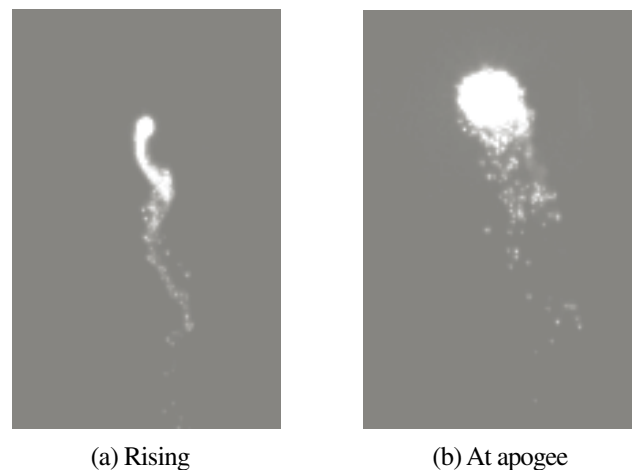


Fig. 3 Trajectory of launched Shell 3.

また、高速ビデオカメラの映像から、打上げ筒から出た煙火玉が回転すれば、その後の運動過程において、回転軸の向きはほとんど変化せず一定となることがわかった。

さらに、高速ビデオカメラの映像を解析した結果、回転速度は約3～15 rpsであった。煙火玉の回転の原因としては、煙火玉の位置が打上げ筒の軸からずれ、玉と筒の間のクリアランスの不均一性が生じて、揚薬の燃焼ガスが玉周囲の隙間から均一に噴出しないことにより、燃焼ガスによる推進力は玉に不均一に働くためであると推測し、回転速度は揚薬量やクリアランス等の打上げ条件に影響されると

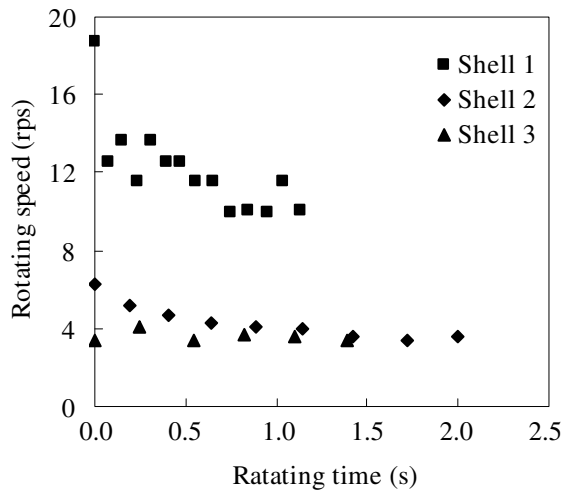


Fig. 4 Relation of rotating speed and rotating time of launched spherical aerial shells.

考える。著者らの実験に用いた揚薬量は10 g以下であったが、実際の煙火打上げ現場では、3号煙火玉用揚薬量は25 g～30 gである。揚薬量が多いと回転速度が速くなると考えるが、実験数が少なかったため、揚薬量と回転速度の相関関係を見出すことはできなかった。

空気の粘性が回転煙火玉に作用するトルクによる回転速度の減衰を高速度ビデオの映像により調査した。回転速度は空気の粘性により、回転時間の経過とともに減少する。その関係をFig. 4に示す。横軸は煙火玉の飛ばし時間ではなく、回転の経過時間である。煙火玉は初期の回転速度が速ければ、その後の回転減衰が速くなる傾向が見られる。

4.2 計算結果

運動方程式(11)～(13)を用いて、Fig. 3に示した煙火玉の各時刻における座標を計算した。計算には、実験から求めた煙火玉の筒口速度(筒口から出た時の速度)を初速度として用いた。まず、風などの影響を考慮せず、Magnus力を運動方程式に取り入れ計算した結果をFig. 5に示す。計算に使用したパラメーター(Calculation 1)をTable 1に記す。比較のため、高速度ビデオカメラで撮影した映像から得られた煙火玉の各時刻の実座標を同じくFig. 5に示す。煙火玉が高度45 mに到達したとき、水平移動距離の実験値は約4 mであった。Magnus力のみを考慮した計算結果は、同じ高度に到達した煙火玉は水平移動距離が1.2 mであり、実験値より短いことを示している。このことから、Magnus力以外にも、煙火玉の水平移動におよぼす風などの影響因子があると考えられる。次に、Magnus力および風の影響を同時に運動方程式に取り入れて計算した結果をFig. 6に示す。計算にはTable 1中のパラメーター(Calculation 2)を用いた。煙火玉の水平移動については、Fig. 5をFig. 6と比較して、風の影響より、Magnus力の影響が小さかったことがわかる。この計算例には、初速度 $u_0 = 35 \text{ m s}^{-1}$ 、角速度 $\omega = 4 \text{ rps}$ を用いた。Fig. 3の写真から、煙火玉の回転軸の向きが鉛直方向から大きくずれていると推測し、計算には 60° の回転角度を用いた。実際の現場では3号煙火玉の打ち上げに25～30 gの揚薬量を用いたとき、初速度が 70 m s^{-1} 以上に達することがある。回転が起こる場合、回転速度は15 rpsを超え、

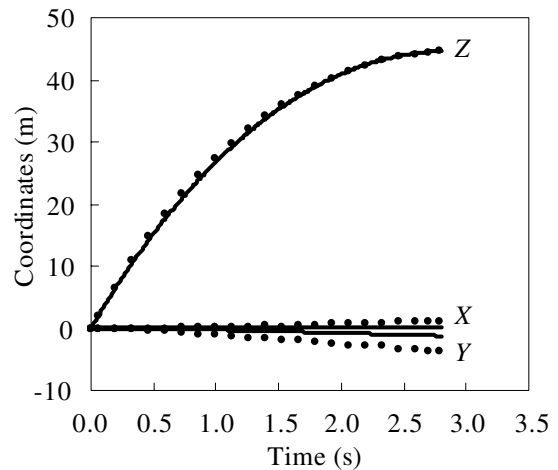


Fig. 5 Comparison of experiment and calculation 1. (Solid line: Calculation results; Solid sign: Experimental results)

回転角度は 60° よりもっと大きい可能性がある。したがって、実際の煙火打上げ現場では、Magnus力による煙火玉の水平移動距離はFig. 5に示した計算結果よりさらに遠くなることがありうる。煙火消費時の保安距離を検討する際にはこれらの要素を考慮すべきである。

式(2)中のMagnus係数 C_L については、F. Yamamoto⁵⁾の結果を引用したが、今後、煙火玉に関するMagnus係数 C_L を実験で求める必要がある。

式(15)中の空気トルク係数 C_T については、著者らの調べる限り静止流体中で得られた結果しか見当たらない。本研究では、Fig. 4に示した著者らの実験結果¹⁾から、空気トルク係数 C_T を近似的に求めた。得られた3号煙火玉 C_T の値は約35～70である。

4.3 回転速度と回転軸向きの影響

実際の煙火打上げ現場では、3号煙火玉用揚薬量が約25～30 gであるので、玉の筒口速度は 70 m s^{-1} 以上、最高到達高度は110 m以上に達することがある。ここでは、このような条件を考慮し、鉛直方向で打ち上げられた煙火玉が回転しながら空中で開発せずそのまま地面に落下した場合の運動軌跡をシミュレーションした。

筒口速度を 70 m s^{-1} 、回転速度を10 rpsとして、計算した煙火玉の運動軌跡および水平移動距離をFig. 7に示す。計算に使われている他のパラメーターはTable 1中のCalculation 1に用いた数値と同様である。計算した運動軌跡によれば、Magnus力による煙火玉の水平移動に対して、次のことがわかった。

煙火玉の上昇の過程において、Magnus力の作用により、水平方向へ加速される。

玉が最高高度に達した後、回転軸の方向が変化せず、垂直における運動方向が変わったため、式(2)によって、 $(-\vec{u}_r \times \vec{\omega})$ の符号、あるいはMagnus力 $\vec{F}_L$ の方向が変わる。すなわち、最高高度に達した後、煙火玉に働くMagnus力 $\vec{F}_L$ の方向は反対となる。煙火玉の落下過程においては、その水平方向の運動速度が減速される。水平速度がゼロになると、Magnus力は引き続き玉に働いているため、水平運動方向が反対になり、玉が打上げ筒に向いてバックする。実際

Table 1 Parameters used for the numerical calculation program.

Parameters	Calculation 1	Calculation 2
Shell mass (kg)	0.24	0.24
Shell diameter (m)	0.08	0.08
Muzzle velocity (m s^{-1})	35	35
Average drag coefficient C_D	0.5	0.5
Magnus coefficient C_L	1.8	1.8
Torque coefficient C_T	50	50
Air density (kg m^{-3})	1.2	1.2
Kinematic viscosity of air ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	1.51×10^{-5}	1.51×10^{-5}
Gravity acceleration (m s^{-2})	9.8	9.8
Wind velocity (m s^{-1})	—	5
Angle between wind velocity vector and axis z ($^\circ$)	—	90
Angle between horizontal component of wind velocity vector and axis x ($^\circ$)	—	290
Rotating speed (rps)	4	4
Angle between rotating axis and z axis ($^\circ$)	60	60
Angle between horizontal projection of rotating axis and x axis ($^\circ$)	0	0

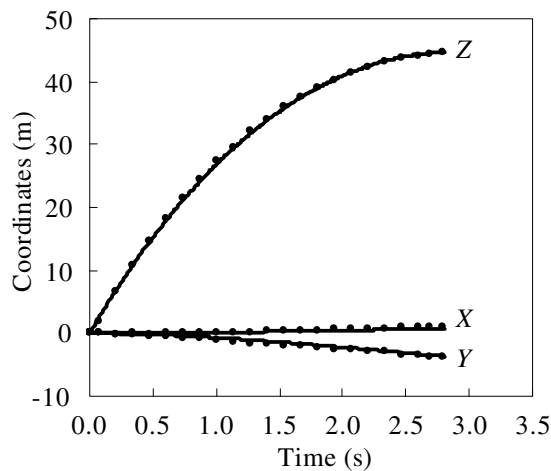


Fig. 6 Comparison of experiment and calculation 2. (Solid line: Calculation results; Solid sign: Experimental results)

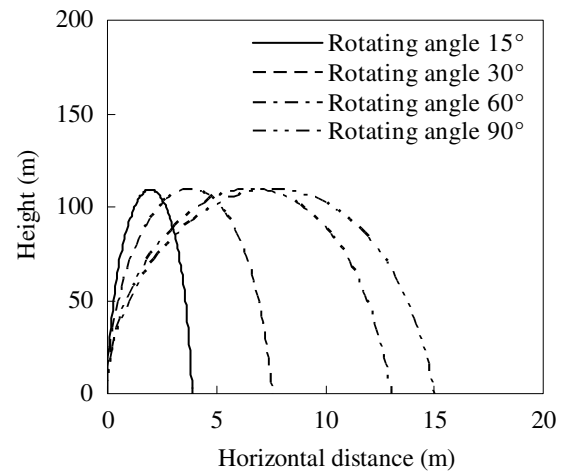


Fig. 7 Influence of rotating angle on a rotating dummy shell. (Muzzle velocity = 70 m s^{-1} , Rotating speed = 10 rps)

に、空気の粘性により玉の回転速度が減衰しているため、Magnus力は少しずつ減少していき、水平方向の減速も小さくなるので、玉がほとんどバックしないうちに地面に落下してしまう。

水平方向の移動距離におよぼす回転角度の影響をFig. 7に示す。回転角度が大きくなる、あるいは回転軸の向きが水平に近づくほど、水平方向の移動距離は大きくなる。この計算例では、 60° の回転角度のとき、煙火玉の水平移動距離は13 mに達するが、 90° のとき、この移動距離は15 mに達する。

R. L. Schneider²⁾はMagnus力による煙火玉の水平移動を否定したが、D. Eckhardtら³⁾は8号煙火玉の水平移動距離が85 m以上に達した計算結果を得て、Magnus効果を過

大に評価した。本研究では、煙火玉の回転の有無や回転の向きを実験で確認し、回転速度の減衰を実験で調べた。これらの結果に基づいて、Magnus力および空気の粘性による煙火玉の回転減衰方程式を取り入れた3次元運動方程式を設けた。D. Eckhardtらの計算と比較するために、著者は8号煙火玉の筒外弾道を数値的に計算したが、水平移動距離はD. Eckhardtらの計算結果より小さかった。これは、D. Eckhardtらの計算には、煙火玉の回転減衰を考慮しなかったためと考える。

また、Fig. 7の計算結果によれば、鉛直に打ち上げられた煙火玉に対して、煙火玉が回転しても、煙火玉に働くMagnus力はその鉛直方向の運動にほとんど影響を与えないことがわかった。これは、鉛直方向における煙火玉に働

く Magnus 力の成分は他の力 (例えば空気抵抗力や重力) に比べて小さいためである。

以上のシミュレーションは風あるいは空気の流動速度をゼロとして計算したものであるが、実際の煙火打上げ現場では、風や打上げ角度 (打上げ筒の垂直方向の設置誤差) などの影響によって、不発煙火玉は打上げ筒からもっと遠く離れたところまで落下する可能性がある。

5. 結論

- 1) 鉛直に打ち上げられた3号煙火玉の回転様子を高速度ビデオカメラで撮影し、回転する煙火玉と回転しない煙火玉があることを実験により確認した。煙火玉の回転・無回転および回転軸の方向は種々の影響因子によるランダム現象である。
- 2) 高速度ビデオカメラの映像から、回転軸の向きが進行方向と必ずしも一致しない煙火玉があることが確認された。また、打上げ筒を出た後、回転軸の向きはほとんど変化せず一定となる。
- 3) 煙火玉の回転速度は空気粘性の作用により減衰することが実験で確認された。本研究の計算では、煙火玉の回転減衰に関する空気粘性のトルク係数は実験により求めた値を用いた。

打上げ煙火玉の保安距離を検討する際に、不発煙火玉の最大可能な落下距離を考慮しなければならない。その中でも、Magnus 力による影響は無視すべきではない。

3号煙火玉についての実験はまだ数が少ない。特に、煙火模擬玉の地面に落下するまでの実験データはない。今後の研究では、煙火模擬玉の地面に落下するまでの全軌跡を測定する必要がある。

References

- 1) D. Ding, Y. Ooki, M. Higaki, and T. Yoshida, Sci. Tech. Energetic Materials, 68, 14 (2007).
- 2) R. L. Schneider, 5th International Symposium on Fireworks, pp. 458-462 (2000), Natural Resources Canada.
- 3) D. Eckhardt, and H. Andre, 5th International Symposium on Fireworks, pp. 85-103 (2000), Natural Resources Canada.
- 4) F. Yamamoto, Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 253, pp. 2055-2061, (1986), JSME.
- 5) S. C. R. Dennis, S. N. Singh, and D. B. Ingham, J. Fluid Mech., 101, 257 (1980).

A study of Magnus force acting upon a launched rotating spherical aerial shell

Dayu Ding [†] and Tadao Yoshida

Trajectories of launched spherical aerial shells were recorded with the high-speed video camera and rotations of the shells were confirmed in our experiments. Based on the experimental results, it can be understood that rotation and direction of rotational axis of a launched spherical aerial shell are a random phenomenon by various influence factors. Moreover, attenuation of the rotating speed of a shell by the viscosity of air was observed and torque coefficient was obtained by the experiments. With these experimental results, the three-dimensional equations of motion which took in Magnus force and rotational attenuation were calculated numerically, and it was examined how much Magnus force would have affected movement of a launched rotating spherical aerial shell.

Keywords: Magnus force, Rotating sphere, Spherical aerial shell, Fireworks, Numerical calculation

Department of Mechanical Engineering, Ashikaga Institute of Technology, 268-1 Omae-cho, Ashikaga-shi, Tochigi 326-8558, JAPAN

[†]Corresponding address: dding@ashitech.ac.jp