

ロケットの重心が軸線上にない場合の 弾道に関する研究

(昭和32年6月11日 受理)

村田 勉・田中 一三

(日本油脂株式会社武蔵工場)

§1. 結 言

ロケットは地球重力の場を考えないときには、元来まっすぐに飛ぶように設計されるものである。然るに実際に飛翔試験を行う場合、弾道が曲がることをよく経験する。その原因はロケット全体としての構造なり Misalignment なりに起因するのが多いと考えられるけれども、燃料の重心点の偏りと燃料以外の部分の重心点の偏りとの影響も無視できないようである。

此の点はロケットとして一つの基本的な問題であるので最近 Jarmolow¹⁾ も Euler 流の運動方程式を解いているが、それはロケットの軸線に対する運動だけを論じ、地面に対する運動を計算していない。故に筆者等は此處に地面に対する運動の一般的な解法を研究することとする。但し空気抵抗は Struble and Black²⁾ にならい速度の自乗に比例するとする。

而かして 図1(a)の如く燃料の重心が軸線をずれた場合と、図1(b)の如く頭部の重心がずれた場合とに就き計算する。

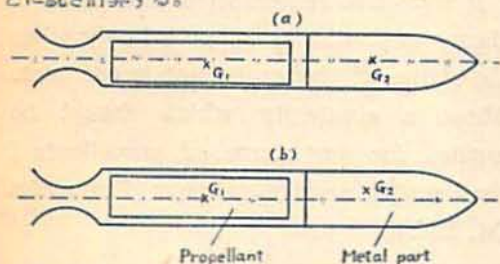


Fig. 1. Misaligned nonspinning rocket.
(a) c. g. of propellant is not on the longitudinal axis.
(b) c. g. of metal part is not on the longitudinal axis.

§2. ロケットに働く力

ロケットには中心線上に燃焼ガスの噴出により推力が働いている。従つてロケットの重心が正しく中心線上にあれば、推力 T はまともに重力に作用し、ロケットは推力 T の方向にまっすぐ飛んでゆく。しかし前に

述べたように、重心が中心線から外れている場合には、ロケットは推力 T のほかに、ロケットを回転させようとする偶力を受けることになる。

今図2のようなロケットを考え、その末端に推力 T が働いているとする。剛体に作用する力は作用線上のどこへ動かしても同じことであるから、 T を重心のなるべく近くへ持つてきて考える。

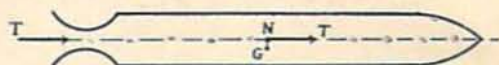


Fig. 2. Normal GN from c. g. to longitudinal axis.

図で G をロケットの重心 (中心線から外れている) N を重心に最も近い中心線上の点とする。直線 NG はロケットの中心線と直角に交る。

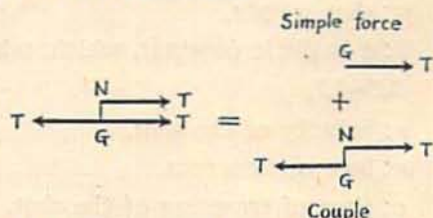


Fig. 3. Decomposition of the force which acts on a misaligned rocket.

図2の力の作用点の附近を改めて図3に示してあるが、ここで重心 G に T と同じ大きさと同方向を持ち互いに逆向きの力を加えてみる。こうすれば重心 G には力がかからないのと同じことになるが、図3は重心 G に働く単純力 T と、紙面に垂直な軸のまわりの偶力 $p \times T$ を一緒にしたものとみなされる。ここに p は偶力の腕で、図では NG 間の距離がこれにあたる。

偶力は単純力と違って、同一平面内ならどこへ動かしても効果は変わらないので、結局このロケットに働く力は、重心に作用する推力 T と、同じ重心のまわりの偶力 pT の二つから成ると考えられる。前者はロケット

トを頭の方にまっすぐ飛ばす効果を持つており、後者はロケットの向きを向えようとする効果を持つている。従つてこの二種類の力からは、ロケットは中心線と重心 G を含む平面内で曲線軌跡を描くことになる。更にロケットが三次元運動をするためには、ロケット自身が中心線のまわりの回転を行うか、あるいは尾翼その他による空気抵抗のかたよがりが必要になる。この報告ではそこまでは触れないことにする。

§3. 偏心してないロケットの速度

まず重心が正しく中心線上にあつてまっすぐ飛ばすロケットを考える。最初に空気抵抗が無視できる場合を考えると、ロケットの運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = T \quad \text{または} \quad m \frac{dv}{dt} = T \quad (1)$$

となる。ここに m はロケットの質量、 T は推力、 x はロケットの進行方向にとつた座標、 v は x 方向の速度、そして t は時間である。ところでロケットの質量 m は、燃料の消費を考えると

$$m = m_0 - \dot{m}t \quad (2)$$

のように時間の函数となる。 m_0 はロケット全体の最初の質量(全備弾量)、 \dot{m} はいわば燃料の消費速度である。このとき(1)の運動方程式は簡単に積分できて、 v が次の形に求められる。

$$v = \frac{T}{\dot{m}} \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} \quad (3)$$

推力 T がグラム単位で T' で与えられているときは、 $T = gT'$ であり(3)式右辺の係数は $gT'/\dot{m} = gI_{sp}$ と書くことが多い。ここに $I_{sp} = T'/\dot{m}$ は比力積と呼ばれるもので、ロケットの弾道学上重要な因子になっている。さすれば(3)式は

$$v = gI_{sp} \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} \quad (3')$$

となる。

空気抵抗のある場合は、運動方程式は次の形になる。

$$m \frac{dv}{dt} = T - D \quad (4)$$

D は空気抵抗で、一般には速度の函数

$$D = K_d \rho d^2 v^2 \quad (5)$$

である。ここに ρ は空気の密度、 d はロケットの直径で、係数 K_d はマッハ数 M が1より小さいときには

$K_{d0} = \text{const.}$ $M > 1$ では Struble and Black²⁾ によれば、

$$K_d = b^2 + \frac{2ab}{M} + \frac{(a^2 - 1)}{M^2} \quad (6)$$

のような速度の函数となる。ここに a, b はロケットの形によつてきまる定数である。

このとき運動方程式(4)の解は $M \leq 1$ では

$$v = \frac{T}{\dot{m} \delta} \left\{ \frac{(m_0/m)^{2\delta} - 1}{(m_0/m)^{2\delta} + 1} \right\} \quad (7)$$

となる。ここに $\delta = \sqrt{K_{d0} \rho d^2 T / \dot{m}}$ で dimensionless の数である。

一方 $M > 1$ では

$$bv + ae = A \left\{ \frac{(m_0/m)^{2\epsilon} - G}{(m_0/m)^{2\epsilon} + G} \right\} \quad (8)$$

$$A = \sqrt{\frac{T}{\rho d^2} + c^2}$$

$$\epsilon = \frac{b \rho d^2}{\dot{m}} \sqrt{\frac{T}{\rho d^2} + c^2}$$

$$G = \frac{1 - (a+b)c/A}{1 + (a+b)c/A}$$

となる。 c は音速、 m_0 はロケットが音速に達したときの質量で、(8)式は $m = m_0$ のとき $v = 0$ となるように積分定数を選んである。従つてこの場合には、まず $v \leq c$ の間は(7)式を用いて計算し、 $v \geq c$ となつてからは(8)式によつて計算を進めることができる。簡単にはマッハ数にかかわらず $K_d = \text{const.}$ とおく計算法もあるが、その場合には v は(7)式のみから求められる。

§4. 偏心ロケットの運動方程式

ロケットが平面運動をするときには、その軌跡は任意にとつた直交座標に関して座標成分 x, y を

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (9)$$

のように時間の函数として表わすことができる。(9)式は t をパラメーターとする平面曲線の方程式であるが、パラメーターとしての時間の代りに曲線の長さ S をとつて、これを

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

そして

$$s = s(t) \quad (10)$$

のように二組の方程式に書き直すこともできる。

今ロケットが重心 G に関して図4のような軌跡を描いて飛んでいるとする、図の位置でこのロケットに作用する力を考えてみると、単純力 T はロケットを曲線の切線方向にまっすぐ進めようとし、偶力 pT はロケットの方向、言い換えれば曲線の勾配を変えようとする。

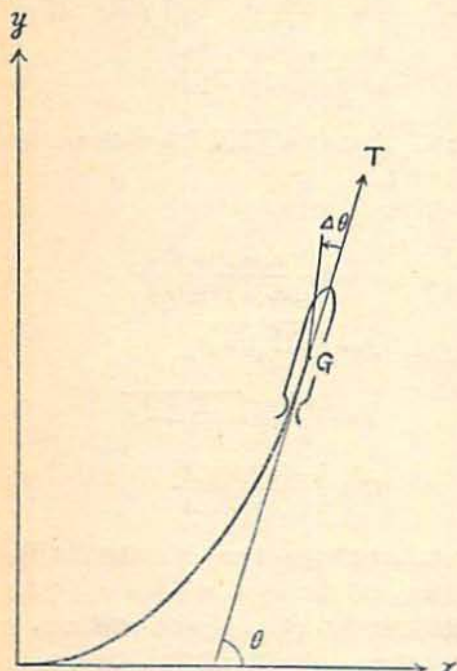


Fig. 4. Shift of flight direction by the couple component.

従つてこのロケットの運動方程式は、切線方向に引いたベクトルの長さを v 、切線が x 軸となす角度を θ として次のように表わされる。

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = T - D \quad (11)$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = pT \quad (12)$$

ここに I は重心のまわりの紙面に垂直な軸に関するロケットの慣性モーメントである。なおロケットの θ 方向の運動については簡単のために空気抵抗の項を無視した。

ところで θ 方向の運動が小さいとすれば、切線方向に引いた微小ベクトルの長さ dr は、曲線の微小部分の長さ ds で近似させることができる。従つて(11)式は

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = T - D$$

または

$$m \frac{dv}{dt} = T - D \quad (13)$$

と書くことができる。ここに v は一般的なロケットの速さであり、(13)式は前節に述べた方法で解くことができる。

一方(12)式は、独立変数を t から s に移すと

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \frac{d\theta}{ds} \right) = \frac{pT}{I}$$

となり、 $v = ds/dt$ および曲線の曲率 $\kappa = d\theta/ds$ を導入すれば、

$$\frac{d}{dt} (v\kappa) = \frac{pT}{I} \quad (14)$$

と書くことができる。(14)式の右辺は t に関して既知であるから、この積分は可能であり、 $v\kappa$ が t の関数で求められる。

§5. 偏心ロケットの飛翔軌跡

前節で述べたロケットの運動方程式で、(13)式より v が、そして(14)式から $v\kappa$ が、それぞれ時間 t の関数として求めることを知った。次に v および $v\kappa$ が与えられたときに、飛翔軌跡を(9)式のような座標成分で表わすことを考える。

一般に曲線論より、平面曲線の方程式が

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

で与えられたときには、曲線上の各点での方向余弦 $\xi = dx/ds$, $\eta = dy/ds$ は Frenet²⁾ の公式より次の方程式を満足することが証明される。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{ds^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \frac{d\xi}{ds} + \kappa^2 \xi &= 0 \\ \frac{d^2 \eta}{ds^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{ds} \frac{d\eta}{ds} + \kappa^2 \eta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここでパラメーターを s から t に移し、 ξ, η を t の関数とみれば(15)式は次のように変形される。ここに $v = ds/dt$ である。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{1}{v\kappa} \frac{d(v\kappa)}{dt} \frac{d\xi}{dt} + (v\kappa)^2 \xi &= 0 \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{1}{v\kappa} \frac{d(v\kappa)}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (v\kappa)^2 \eta &= 0 \end{aligned}$$

方向余弦の間には $\xi^2 + \eta^2 = 1$ の関係があり、また初期

条件として $t=0$ で $\eta=0$ とすれば、上式は次の解を与える。

$$\begin{aligned} \xi &= \cos(v\kappa) \\ \eta &= \sin(v\kappa) \end{aligned} \quad (16)$$

従つて $x(t)$, $y(t)$ は (16) をそれぞれ κ について積分して

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v \cos(v\kappa) dt \\ y(t) &= \int_0^t v \sin(v\kappa) dt \end{aligned} \quad (17)$$

で求められることになる。 v および $v\kappa$ はそれぞれ t の既知函数であるが、それぞれ相当複雑な形をしているので、(17) の積分はふつうは数値積分によるほかはない。

§6. 偏心ロケットの特性

実際にあつて数値計算を行う前に実際のロケットの慣性性能率、偶力の弱などが時間とともにどのように変化するかをしらべておく。ロケットの構造は簡単に図5のように二つに分けることができる。

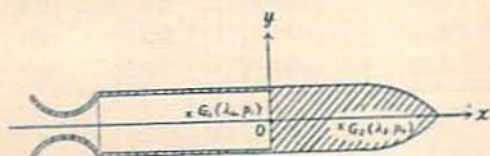


Fig. 5. Coordinates of c. g. in propellant and metal part of the misaligned rocket.

図の白いところは燃焼室、この部分の特性は時間とともに変化する。この部分の記号には以下添字1をつけて表わす。一方図の斜線をほどこした部分を仮りに頭部と呼べば、ここの特性は時間によらない定数である。頭部の特性には添字2を附すことにする。そしてロケット全体の特性は添字なしの記号で表わす。

まづ質量 m は

$$m = m_1 + m_2 \quad (18)$$

となる。重心の位置は図5のような座標系の x 座標を λ , y 座標を p とすれば、

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) / (m_1 + m_2) \\ p &= (p_1 m_1 + p_2 m_2) / (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (19)$$

である。図の座標系の原点 o は便宜上頭部と燃焼部分の境界にとつたが、中心線上ならばどこにとつても同

じである。

次に原点 o のまわりの慣性性能率を I_0 とすれば

$$I_0 = I_1 + I_2$$

となる。このとき I_1 , I_2 もそれぞれ o のまわりで計算した値をとる必要がある。実際必要なのは重心のまわりの慣性性能率 I であるから、それを求めると

$$I = I_1 + I_2 - (\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2)^2 / (m_1 + m_2) \quad (20)$$

となる。ここで重心の方向 y のズレは微小と考慮して無視した。

このようにして運動方程式に必要なロケットの特性 m , p , I は何れも燃焼部分の質量 m_1 を含み、時間の函数であることがわかる。

§7. 数値計算例

最後に一つ計算値を挙げておく。図6のような簡単なロケットを考え、その特性値が大凡次の如くであるとする。

$m_1 = 2.35(1-t/r)$ kg	$m_2 = 7.15$ kg
$r = 1.5$ sec	$\dot{m} = 2.35/1.5$
$\lambda_1 = -25.0$ cm	$\lambda_2 = 7.0$ cm
$I_1 = 3200(1-t/r)$ kg-cm ²	$T = 350$ kg
$I_2 = 6400$ kg-cm ²	$I_{sp} = 224$ sec

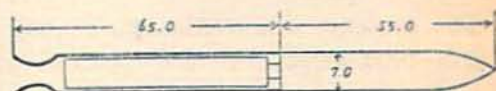


Fig. 6. Dimensions of a simple rocket used in numerical calculation.

このロケットについて、燃焼部分および頭部の重心のズレ p_1 , p_2 がそれぞれ独立に次の値をとつたときの運動軌跡を計算してみよう。

$A_1 : p_1 = 0.05$ cm	$p_2 = 0$
$B_1 : p_1 = 0.10$	$p_2 = 0$
$A_2 : p_1 = 0$	$p_2 = 0.05$ cm
$B_2 : p_1 = 0$	$p_2 = 0.10$

簡単のために燃焼部分の特性は、 m_1 だけが時間とともに変化する、形状などの幾何学的特性は変わらないと考える。これは燃焼部分の形は一定で密度だけが時間とともに減少することであり、実際には全面燃焼式管状推進器が近似的にこの条件を満たしている。

上の条件で、運動方程式に必要な特性値を計算してみると、cgs 単位に換算して

$$m=9.50 \times 10^3(1-0.247\sigma)$$

$$I=9.60 \times 10^6 \cdot$$

$$(1-0.569\sigma+0.0445\sigma^2)/(1-0.247\sigma)$$

$$A_1: p=1.24 \times 10^{-2}(1-\sigma)/(1-0.247\sigma)$$

$$A_2: p=3.76 \times 10^{-2}(1-0.247\sigma)$$

$$T=3.43 \times 10^8$$

となる。上に p は A_1, A_2 の場合だけ計算してあるが、 B_1, B_2 ではそれぞれ上の式を2倍すればよい。なお σ は燃焼完了点を 1.0 にとつた時間のパラメーターで $\sigma=t/\tau=1/1.5$ である。

まず 線速度 v に関する解は (7), (8) で与えられるが、 K_{a0} を 0.09, a, b をこのロケットで 0.87 および 0.20 とし、空気の密度 $\rho=1.20 \times 10^{-3}(\text{g/cm}^3)$, 音速 $c=340\text{m/sec}$ とすれば、

$$v=2560 \left\{ \frac{1-(1-0.247\sigma)^{1.73}}{1+(1-0.247\sigma)^{1.73}} \right\} \text{ m/sec } (M < 1)$$

$$v=4170 \left\{ \frac{\left(\frac{1-0.247\sigma_c}{1-0.247\sigma} \right)^{1.23} - 0.393}{\left(\frac{1-0.247\sigma_c}{1-0.247\sigma} \right)^{1.23} + 0.393} \right\} \text{ (21)}$$

$$-1478\text{m/sec } (M \geq 1)$$

が得られる。ここに σ_c は v が音速に達したときの σ の値で、これは (21) 式より $\sigma_c=0.58$ となる。 K_a をマッハ数に無関係に const にとる方法¹⁾では、 $K_a=0.25$ とすれば、 v は (7) 式より

$$v=1525 \left\{ \frac{1-(1-0.247\sigma)^{2.87}}{1+(1-0.247\sigma)^{2.87}} \right\} \text{ m/sec} \quad (22)$$

となり、理想的に空気抵抗を無視した真空中では、(3) 式より

$$v=2190 \ln \left(\frac{1}{1-0.247\sigma} \right) \text{ (m/sec)} \quad (23)$$

となる。これらの計算結果を表1および図7に示す。

一方 v_K は (14) 式より

$$v_K = \int_0^{\sigma} \frac{pT}{I} dt = \tau \int_0^{\sigma} \frac{pT}{I} d\sigma \quad (24)$$

で与えられるので、このロケットについては

表 1

燃焼時間 $\sigma=t/\tau$	弾速 (m/sec)		
	空気中 (21) 式	空気中 (22) 式	真空中
0.00	0	0	0
0.05	27	27	27
0.10	55	54	55
0.15	84	82	84
0.20	112	110	112
0.25	140	138	141
0.30	170	166	171
0.35	200	195	200
0.40	230	224	230
0.45	260	253	260
0.50	291	283	292
0.55	322	312	323
(0.58)	(340)		
0.60	351	342	354
0.65	382	372	386
0.70	413	402	419
0.75	444	432	452
0.80	475	462	486
0.85	507	493	518
0.90	539	523	553
0.95	571	553	587
1.00	603	583	624

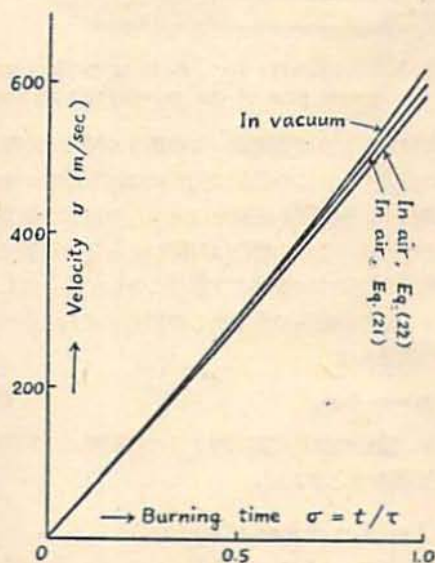


Fig. 7. Relation between the velocity and the burning time (dimensionless) of the rocket.

$$\left. \begin{aligned} A_1: v\kappa &= -8.14 \cdot \\ \ln(1-0.569\sigma+0.0445\sigma^2) &= -9.56 \cdot \\ \ln(1-0.0936\sigma)/(1-0.476\sigma) & \\ A_2: v\kappa &= 5.29 \cdot \\ \ln(1-0.0936\sigma)/(1-0.476\sigma) & \end{aligned} \right\} (25)$$

表 2

σ	A_1	B_1	A_2	B_2
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.049	0.097	0.103	0.205
0.10	0.097	0.195	0.208	0.416
0.15	0.145	0.289	0.317	0.634
0.20	0.192	0.383	0.429	0.858
0.25	0.238	0.476	0.545	1.090
0.30	0.284	0.568	0.664	1.329
0.35	0.330	0.659	0.787	1.575
0.40	0.373	0.746	0.915	1.831
0.45	0.417	0.833	1.048	2.095
0.50	0.459	0.919	1.184	2.368
0.55	0.501	1.020	1.326	2.652
0.60	0.542	1.088	1.473	2.946
0.65	0.587	1.173	1.623	3.246
0.70	0.619	1.238	1.785	3.570
0.75	0.656	1.312	1.951	3.902
0.80	0.690	1.381	2.124	4.248
0.85	0.724	1.449	2.304	4.609
0.90	0.756	1.511	2.493	4.987
0.95	0.785	1.570	2.691	5.382
1.00	0.812	1.624	2.899	5.798

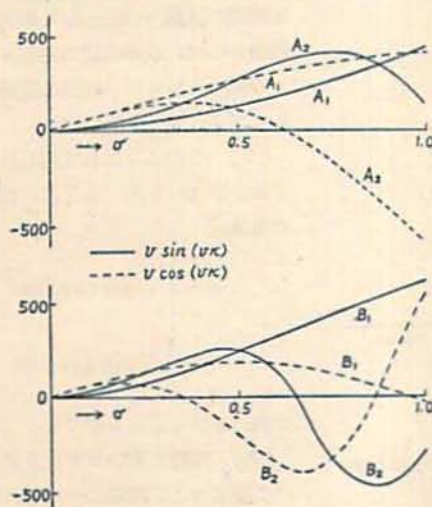


Fig. 8. Numerical values of functions which are used in trajectory calculation.

となる。 B_1, B_2 ではそれぞれ上の式の2倍となることはいままでもない。このようにして得られた $v\kappa$ の値は次の表2のごとくである。

上の値を使を使つて (17) 式の $v \cos(v\kappa)$ および $v \sin(v\kappa)$ を計算しグラフに描くと図8のようになる。ここでは簡単のために以下 v を (21) で計算したものについてののみ例示する。

x, y をそれぞれ σ の函数で表わせば, (17) 式より

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= r \int_0^\sigma v \cos(v\kappa) d\sigma \\ y(\sigma) &= r \int_0^\sigma v \sin(v\kappa) d\sigma \end{aligned} \quad (26)$$

となる。(26) 式の積分結果は表3および図9に示すようになる。

表3および図9の結果から, 次のようなことがわかる。まず推業の偏心は頭部の偏心にくらべて, ロケット全体の軌跡に及ぼす影響は小さい。その理由は, 一つにはこの場合推業の重量が, 頭部の重量にくらべて小さいことがあり, もう一つはロケット全体の偏心が推業によるときは, 燃焼の進行とともに小さくなるのに反し, 頭部によるときは燃焼が進めば反つて大きくなるからである。

各時間に於けるロケットの x 軸(空間に固定した)との傾き θ だけを求めるには x, y を出さなくても

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{dy/d\sigma}{dx/d\sigma} = \tan(v\kappa) \\ \therefore \theta &= v\kappa \end{aligned} \quad (27)$$

で計算することができることをつけ加えておく。

この例に挙げた $0.05\text{cm} = 0.5\text{mm}$ ていどの偏心は実際のロケットにおいては往々にして起りうることである。その場合はロケットの回転および尾翼その他の附属物によつて, ロケットの傾きはここに挙げた計算のように著しくはならない。ただその場合でも, 推業と頭部と何れの偏心が影響が大きいかについては前に述べたのと同じく頭部の偏心が大きく響くであろう。

結 論

以上述べたことを要約すると次のようになる。

(1) 重心が正しく中心軸上にないロケットの運動軌跡を知るために, このような偏心ロケットの運動方程式をたて, その一般解を得た。運動方程式は, ロケットの線速度 v に関する式

$$m \frac{dv}{dt} = T - D$$

表 3

σ	偏な 真空中	心し 空中	A_1		A_2		B_1		B_2	
			x	y	x	y	x	y	x	y
0.00	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m	0m
0.05	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0.10	4	4	4	0	4	1	4	1	4	1
0.15	9	9	9	1	9	2	9	2	8	4
0.20	17	17	17	2	16	5	16	4	14	9
0.25	26	26	26	4	24	9	25	8	19	17
0.30	38	38	37	7	34	16	35	14	23	28
0.35	52	52	50	10	44	26	46	22	25	42
0.40	69	69	65	15	55	38	58	33	22	57
0.45	88	88	82	22	65	53	71	46	15	74
0.50	104	103	101	31	74	72	85	62	3	90
0.55	132	131	121	41	81	94	98	81	-16	104
0.60	157	156	143	54	85	119	111	102	-40	112
0.65	185	184	167	69	86	147	122	127	-67	113
0.70	216	214	190	86	82	176	133	155	-95	105
0.75	248	246	217	105	72	207	142	186	-121	87
0.80	282	280	244	126	56	238	150	219	-141	60
0.85	320	317	272	151	34	267	155	256	-151	25
0.90	360	356	301	177	5	293	158	295	-148	13
0.95	404	398	331	206	-30	314	160	336	-128	-50
1.00	449	443	362	233	-71	329	158	380	-96	-77

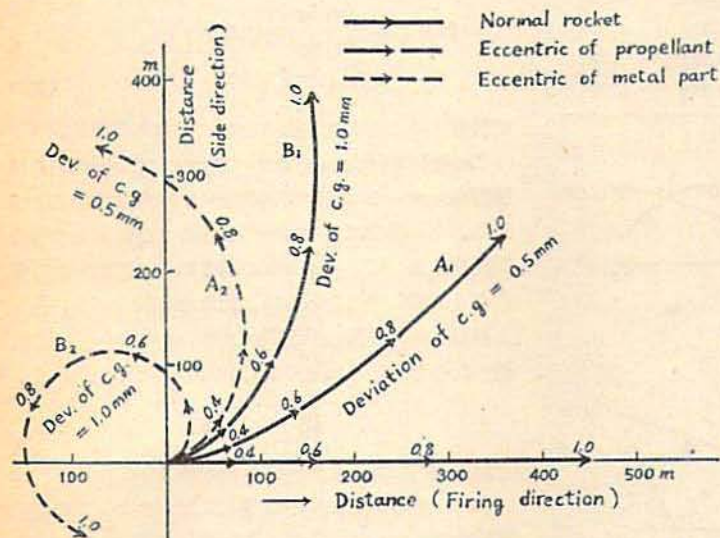


Fig. 9. Calculated trajectories of misaligned rockets.

The figures and arrows show burning time σ 's and corresponding positions of the rockets.

と、ロケットが空間に固定した x 軸となす角 θ の変化を表わす式

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = pT$$

とよりなり、二つは独立に解くことができる。即ち前者は線速度 v を時間の関数 $v(t)$ として与え、後者からは、軌跡曲線の曲率 κ と v の積 $v\kappa$ がやはり時間の関数として求められる。

(2) このようにして得られた v および $v\kappa$ を用いるとき、曲線の軌跡は

$$x = \int_0^t v \cos(v\kappa) dt$$

$$y = \int_0^t v \sin(v\kappa) dt$$

で表わされることを知った。

(3) 実際に近いロケットについて推進および頭部にそれぞれ偏心があつたときの軌跡を数値計算によって求め、ロケットの傾きに対しては、頭部の偏心の方が大きな影響

を持つことを明かにした。

(4) ここに行つた計算は一つの理想的な場合としてロケットは尾翼なく且つ回転しないとしたが、これは、問題を二次元的に取扱ひやすくしたためである。ロケットが回転したり、尾翼があつたりすれば、その方向転換に大きな抵抗を持っているからである。實際に得られるロケットの偏りはここに挙げた例ほど著しくないはずである。しかし何れにしても、ロケットの重心は正しく中心軸上にあるように設計並に製作するのが望ましいことは言うまでもない。

(5) なお上の計算で重力の影響を無視したが、燃焼時間 1.5 秒でいどのロケットでは、重力による自然

落下は 10m までで燃焼時間中の軌跡ではその性質を論ずる場合ほとんど問題にならないからである。

文 献

- 1) K. Jarmalow; J. Appl. Phys. 28 No. 3, 308~313 (1957)
- 2) R. A. Struble and H. D. Black: Jet Propulsion, 27 No. 2, 151~168 (1957)
- 3) 矢野健太郎: 微分幾何学 p. 22 (昭24) 朝倉書店
- 4) J. B. Rosser, R. R. Newton and G. L. Gross. Mathematical Theory of Rocket Flight. (1947)

Trajectory of a Nonspinning Rocket Which is Misaligned.

by Tsutomu Murata and Kazumi Tanaka

1. Introduction.

The motion of a nonspinning rocket is largely affected by a misalignment such that the center of gravity (c. g.) of propellant or of metal part is not on the longitudinal axis, and the trajectory of such a rocket may deviate from the direction of firing.

We have introduced the equations of motion of a misaligned rocket, and obtained their general solutions. Moreover, we have calculated, as an example, the trajectory of 7cm. rocket.

2. Velocity of a normal rocket.

In a normal rocket, the c. g. is on the longitudinal axis, so the rocket flies straight-forwardly unless it is guided. The equation of motion of a rocket during combustion is given by

$$m \frac{dv}{dt} = T - D \quad (1)$$

where m = the mass of a rocket,
 v = the velocity of the rocket,

T = the thrust,
 D = the air drag
 $= K_a \rho d^2 v^2$.

Here ρ is the density of the air, d a diameter of the rocket and K_a a drag coefficient which is generally a function of the rocket velocity v . When D is a function of the second order with respect to v , the Eq. (1) can be solved and gives a relation between rocket velocity v and time t which is measured from the start of combustion.

Usually, as the function K_a takes a different form according to an increase of the rocket velocity or its Mach number, the solution must cover the different formulae which correspond to different ranges of velocities.

3. Equations of motion of misaligned nonspinning rocket.

Misalignment or deviation of c. g. from the longitudinal axis of rocket, causes a couple around the perpendicular axis to

longitudinal one. The couple affects the direction of rocket flight, and the change of direction θ follows the next relation.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = pT \quad (2)$$

where I is the moment of inertia of rocket at the c. g. around the axis of couple, p is deviation of the c. g. from the longitudinal axis or the axis of thrust as shown in Fig. 2. The misaligned nonspinning rocket moves in a two dimensional plane, then two equations are necessary to determine the trajectory of rocket, Eqs. (1) and (2) give a set of equations of motion in such a case.

A solution of Eq. (2) gives a formula

$$v\kappa = \int_0^t \frac{pT}{I} dt \quad (3)$$

where κ is the curvature of trajectory curve. As the integrand of the right hand of (3) is composed by known function of time t , $v\kappa$ is obtained also as a function of t . And finally, coordinates of the trajectory are given by the next formulae,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v \cos(v\kappa) dt \\ y(t) &= \int_0^t v \sin(v\kappa) dt \end{aligned} \quad (4)$$

Eqs. (4) are derived on a initial condition that the direction of firing is in accordance with the x -axis of the coordinates without loss of generality.

4. Numerical example.

As an example, we calculated the tra-

jectory of a 7cm rocket of which characteristics are as follows:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2.35(1-t/\tau) \text{kg.}, \\ \lambda_1 &= -25.0 \text{cm.}, \\ \lambda_2 &= 7.0 \text{cm.}, \\ I_1 &= 3200(1-t/\tau) \text{kg.-cm}^2., \\ I_2 &= 6400 \text{kg.-cm}^2., \end{aligned}$$

burning time

$$\tau = 1.5 \text{sec.},$$

specific impulse

$$I_{sp} = 224 \text{sec.}$$

where suffix 1 relates to the propellant and 2 to the metal part, and λ is the coordinate distance of c. g. on the longitudinal axis choosing the origin of coordinate to the boundary plane of the two parts.

In the calculation, the drag coefficient K_d is chosen from a report of R. A. Struble and H. D. Black¹⁾, resultant trajectory is shown in Fig. 9. Four curves in the figure show the trajectories corresponding to deviations 0.5mm. and 1.0mm. both of c. g. of the propellant and of the metal part.

The results explain that the deviation of metal part gives a stronger contribution to the course of rocket than does the deviation of propellant part. Of course the results shown are extreme cases, because our calculation has neglected the effects of wings, spinning, and other resistances to the flying direction.

[Nihon Yushi Co., Ltd., Taketoyo Plant.]

1) R. A. Struble and H. D. Black: Jet Propulsion, 27, 151 (1957).